

## MAGNETOSTRICTIVE TRANSDUCERS WITH MECHANICAL LOADS

by R. R. WHYMARK

Mullard Research Laboratories, Salfords, England

### Summary

The influence of mechanical loads upon a window-type magnetostrictor is considered and the deductions checked by measurements. The loads consist of thin stubs either parallel or exponentially tapered. Liquid loads are simulated with high loss structures and optimum loading values are experimentally determined. The results are verified by calculations involving the mechanical  $Q$  of the load material. The electromechanical efficiency is measured and an optimum value of 42 % is obtained for the mounted magnetostrictor, which agrees closely with the value predicted from the theory. Brief investigations of transducer damping with low loss loads are also performed and the results indicate methods for the basic design of practical transmission systems.

### Sommaire

On étudie l'influence de charges mécaniques sur un transducteur à magnétostriction du type à fenêtre, et on vérifie par des mesures les résultats obtenus. La charge était constituée par des petits éléments soit cylindriques, soit en tronc de cône exponentiel. On a figuré des charges liquides par des structures à pertes élevées, et on a déterminé expérimentalement les valeurs optima de la charge. Les résultats sont vérifiés par des calculs faisant intervenir le facteur mécanique  $Q$  du matériau de la charge. On a mesuré le rendement électro-mécanique et obtenu une valeur optima de 42 % pour le transducteur monté; cette valeur concorde bien avec celle prévue par la théorie. On a aussi fait une étude rapide de l'amortissement du transducteur pour des charges à faibles pertes; les résultats obtenus suggèrent une méthode fondamentale de calcul des systèmes pratiques de transmission.

### Zusammenfassung

Der Einfluß mechanischer Belastungen auf einen Magnetostruktionschwinger wurde theoretisch und experimentell untersucht. Als Belastung dienten kurze Ansatzstücke, die zum Teil exponentiell zugespitzt waren. Der Fall einer Flüssigkeitsbelastung ließ sich dabei durch Materialien mit hohen Verlusten nachbilden. Aus Messungen des elektro-mechanischen Wirkungsgrades ergab sich für den eingebauten Schwinger ein optimaler Wert von 42 %, der mit der theoretischen Vorausberechnung recht gut übereinstimmt. Außerdem wurden einige Untersuchungen über die Schwingerdämpfung bei Belastung mit Materialien von geringer Dämpfung durchgeführt, woraus sich Hinweise für die Bemessung von Wandlersystemen in der Praxis ergaben.

### 1. Introduction

Magnetostriction transducers have hitherto been chiefly used for generating acoustic waves in liquid media, under which condition extensive investigations of their basic properties have been carried out. Recent work however, notably that relating to ultrasonic machining and fatigue testing, has made it desirable to examine their properties when the acoustic output from the magnetostrictor is propagated into a finite solid medium. This solid load is usually used to propagate the transducer vibrations to a distant region, where an increase or decrease in energy density may be required. For this purpose the mechanical transmission elements usually consist of a succession of tuned metal stubs, either parallel or tapered to provide an increase or decrease in particle motion. By suitable tapering

and choice of dimensions the energy density in the terminating load can be adjusted within wide limits. In designing the mechanical elements to serve as highly efficient coupling members, it is necessary to reduce their mechanical loss to a minimum and a suitable material must be selected: if very long transmission systems are required or transformers of high step-up ratio, the damping inevitably becomes severe and eventually limits the amplitude of the particle motion that can be established in the load. In practical coupling systems this can be a serious limitation and a brief experimental study of the problems has therefore been made.

Although mechanical damping is a disadvantage in the above transmission systems, it can be used to perform a useful function: mechanical systems formed from a material that is deliberately

tely selected for high loss can be used to provide a wide range of controlled loadings upon the transducer. In particular, it is possible by this means to simulate all common liquid loads; the main advantage of such simulation is the complete absence of cavitation effects and uncontrollable standing wave systems, both of which are usually troublesome in the actual liquid. The provision of controlled loads in this way has received little or no attention and the main aim of the present work is to present a simple theoretical treatment supported by a sound experimental verification.

The theory is developed in terms of an electrical equivalent circuit for the loaded magnetostrictor. The experimental work was done with the aid of electrical impedance measurements and the assumptions involved in the simple theory were checked by measurements of the particle motion at the transducer working face and at a remote region of the tuned load to which it is coupled. By such measurements the reduction in particle motion at the working face of a typical window type magnetostrictor could be expressed in terms of the amount of loading. In addition, the electromechanical efficiency and the mechanical power propagated were also determined; by varying the load over a wide range, optimum load conditions were shown experimentally to exist. The optimum load values measured for given electrical drive conditions were compared with those calculated. Measurements were done at both low and high power.

## 2. Theory

### 2.1. Equivalent electrical circuit

BUTTERWORTH and SMITH [1] derived an equivalent circuit for a ring-type magnetostrictor; this circuit, with appropriate element values, applies equally to the window type magnetostrictor used in the present work. It is shown

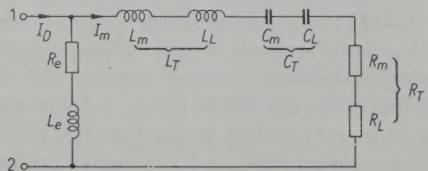


Fig. 1. Electrical equivalent circuit for the loaded magnetostrictor.

(with slight modification) in Figs. 1 and 2; the leakage inductance and copper resistance of the exciting winding are assumed negligible.

$Z_e$  is the clamped electrical impedance, while  $Z_T$  represents the mechanical properties of the transducer with an external load.  $Z_T$  is usually termed the "motional impedance", and its component elements  $L_T$ ,  $C_T$  and  $R_T$  are proportional to the effective mass, compliance and mechanical loss of the total mechanical system when these quantities are referred to the particle motion at the drive face, i. e. to the particle motion at the working face of the transducer which is normally in contact with the load. The suffixes 'L' and 'm' refer to contributions to the motional impedance made by the applied mechanical load, and by the transducer with its associated mounting system respectively.

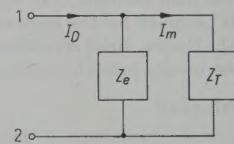


Fig. 2. Equivalent version of the circuit of Fig. 1.

In addition to the derivation of the above circuit, BUTTERWORTH and SMITH developed graphical methods for its complete analysis which are freely applied in the present work, but certain specific points concerning the basic theory require further amplification and are considered below.

### 2.2. Vibrational resonance

The current  $I_m$  through the motional arm is proportional to the oscillatory amplitude at the drive face; vibrational resonance occurs when this reaches a maximum value with respect to the frequency. Inspection of the equivalent circuit indicates that the frequency of vibrational resonance is dependent upon the electrical termination at terminals 1 - 2 (Figs. 1 and 2). For practical purposes the two resonant frequencies of most interest correspond to the extreme cases where the electrical terminals are on either short or open circuit. Thus, if the transducer is driven mechanically with terminals 1 - 2 short circuited, the magnetostrictive properties of the core have no effect and the resonant frequency corresponds to resonance of the motional arm alone, i. e. to purely mechanical resonance. The resonant angular frequency is given by  $\omega_m^2 = 1/L_T C_T$ . With an open circuit at terminals 1 - 2, the resonant frequency corresponds to that of the motional arm in series with the component elements introduced by the magnetostrictive effect, i. e. in series with the clamped electrical impedance; the resonant angular frequency is then given by  $\omega_{em}^2 = 1/(L_e + L_T) C_T$ .

In the present work the transducer is driven electrically and  $\omega_m$  is determined experimentally by tuning for maximum oscillatory amplitude with the exciting voltage held constant (i. e. with effectively zero electrical source impedance);  $\omega_{em}$  is determined in a similar fashion but with the exciting current held constant (i. e. with an effectively infinite electrical source impedance).

### 2.3. Electromechanical efficiency

An important criterion of performance for mechanically loaded transducers is the electromechanical efficiency  $\eta$  defined as the ratio of the mechanical power propagated into an applied load to the electrical power accepted at the input terminals.

Referring to the equivalent circuit a brief analysis shows that:

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{R_m}{R_L} + \frac{R_e}{R_L} \frac{|Z_T|^2}{|Z_e|^2}. \quad (1)$$

For most practical purposes it is important to operate the magnetostriector at as high an efficiency as possible. In normal use the magnetic polarising field is held constant at the optimum value so that  $Z_e$  is fixed.  $\omega$  and  $R_L$  are then the only variables under direct control, and to determine the maximum possible efficiency it is necessary to consider the above expression as a function of these two independent variables.

$1/\eta$  is a minimum with respect to frequency when

$$\left[ \frac{\partial (1/\eta)}{\partial \omega} \right]_{R_L} = 0 \quad \text{i. e. } \omega = \omega_m, \quad \left[ \frac{\partial^2 (1/\eta)}{\partial \omega^2} \right]$$

being positive at this value of  $\omega$ .

Similarly, with respect to  $R_L$ ,  $1/\eta$  is a minimum

$$\text{when } \left[ \frac{\partial (1/\eta)}{\partial R_L} \right]_{\omega} = 0$$

and at  $\omega = \omega_m$  this gives

$$R_L' = \frac{R_m |Z_e|^2 + R_e R_m^2}{R_e}, \quad (2)$$

where  $R_L'$  is the optimum value of the load resistance when the drive frequency and the load are varied simultaneously.

It is often convenient to evaluate a magnetostriector under the condition of constant exciting current. The modified equivalent circuit of Fig. 3 is then valid at the single frequency  $\omega_{em}$ .

For this case

$$\frac{1}{\eta} = \frac{R_e}{|Z_e|^2} \left[ \frac{(R_m + R_L)^2 + X_e^2}{R_L} \right] + \frac{R_m}{R_L} + 1 \quad (3)$$

$$\text{and } \left[ \frac{\partial (1/\eta)}{\partial R_L} \right]_{\omega} = 0$$

$$\text{when } \frac{R_e}{|Z_e|^2} \left[ \frac{R_L^2 - R_m^2 - X_e^2}{R_L^2} \right] - \frac{R_m}{R_L^2} = 0.$$

From which the optimum value of  $R_L$  at  $\omega_{em}$  is obtained and is given by

$$R_L'' = \frac{R_m (R_e^2 + X_e^2) + R_e (R_m^2 + X_e^2)}{R_e}. \quad (4)$$

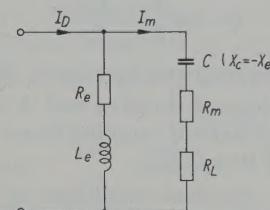


Fig. 3. Equivalent circuit for the single frequency  $\omega_{em}$ .

It should be noted that  $\eta_m$  is always greater than  $\eta_{em}$ , where  $\eta_m$  is the efficiency with load  $R_L'$  at  $\omega_m$  and  $\eta_{em}$  is the efficiency with load  $R_L''$  at  $\omega_{em}$ .  $\eta_m$  is the maximum efficiency obtainable from a given magnetostriector for specified electrical conditions and is sometimes called the "potential efficiency" (see e. g. HUNT [2]).

### 2.4. Drive face oscillatory amplitude

The oscillatory amplitude produced at the drive face of a magnetostriector, for given conditions of electrical drive and mechanical loading, can be forecast from a single amplitude measurement taken on the unloaded transducer, combined with measurements of its equivalent circuit parameters in the unloaded condition.

In most of the experimental work which follows, the transducer is operated at electro-mechanical resonance, and under this condition

$$I_m = I_D \frac{Z_e}{R_e + R_m + R_L}.$$

But as mentioned above,  $I_m$  is proportional to the drive face oscillatory amplitude, so that

$$\frac{|\xi_0|}{|\xi|} = \frac{R_e + R_m + R_L}{R_e + R_m}, \quad (5)$$

where  $\xi_0$  is the drive face oscillatory amplitude without an external load and  $\xi$  is that for an arbitrary load; a constant value of  $I_D$  is assumed for the loaded and unloaded conditions and the moduli of the oscillatory amplitudes are taken since only their magnitudes are observed experimentally.

Further

$$|\xi| = |\xi_0| \frac{R_e + R_m}{R_e + R_m + \omega_m L_L / Q_L}, \quad (6)$$

where  $Q_L$  is the mechanical 'Q' for the material of the load.

### 2.5. The $k^2Q$ parameter

Equation (5) may also be written in the form

$$\frac{|\xi|}{|\xi_0|} = \frac{R_e + R_m}{\omega L_e} \cdot \frac{k^2 Q}{1 + k^2}, \quad (7)$$

where 'Q' is the total mechanical

$$Q = \omega \frac{L_e + L_T}{R_e + R_T},$$

i.e. the mechanical  $Q$  measured in the presence of electromechanical coupling and 'k' is the effective electromechanical coupling factor  $(L_e/L_T)^{1/2}$  (see VAN DER BURGT [3]).

For given electrical conditions of the transducer  $(R_e + R_m)/\omega L_e$  is constant and when  $\xi_0$  is also held constant

$$|\xi| \sim k^2 Q \quad (8)$$

since  $1 + k^2$  approaches unity for normal coupling values.

The  $k^2Q$  product thus provides a useful measure of the relative oscillatory amplitude. It is also of fundamental importance in considering

$$L_T = L_m \left[ \frac{M_T + M_S + M_{H1} + r^2 M_{H2} + (r^2)^2 M_{H3} \dots + (r^{N-1})^2 M_{HN} + (r^N)^2 M'_L}{M_T + M_S} \right], \quad (13)$$

the general behaviour of electromechanical vibrating systems. Thus, if the mechanical stored energy of the particular vibrating system is increased by adding mechanical loads with zero loss,  $k^2$  will be reduced in direct proportion to the increase in kinetic energy while the mechanical  $Q$  will be increased in the same ratio, thereby keeping the  $k^2Q$  product constant. If additional loss is introduced at the same time as the mechanical stored energy is increased,  $k^2$  will be reduced more than proportionally to the increase in  $Q$  and a reduction in the  $k^2Q$  product will result.

### 2.6. Output mechanical power

The power supplied by a transducer to a load is a function of the oscillatory amplitude at the drive face, its frequency of vibration, and the load mechanical resistance.

A tuned load of the type used in the present work has a resistive mechanical input impedance  $R_M$  of amount which can be calculated from its physical properties; thus

$$R_M = \omega_m M_L / Q_L, \quad (9)$$

where  $M_L$  is the effective mass of the load.

The total mechanical power  $W_M$  propagated is given by

$$W_M = \omega_m^2 \xi^2 R_M / 2, \quad (10)$$

where  $\xi$  is a peak value.

### 2.7. Calculation of the motional inductance

Assuming that the value of  $L_m$  is known from measurements on the unloaded transducer, it follows directly from kinetic energy considerations that for a cylindrical load coupled directly to a mounting stub (see detailed description of loading arrangements Section 3.1):

$$L_T = L_m \left( \frac{M_T + M_S + M'_L}{M_T + M_S} \right), \quad (11)$$

where  $M_T$ ,  $M_S$  and  $M'_L$  are the effective masses of the magnetostriector, mounting stub and cylindrical load respectively.

For the case of a single step-up horn interposed between the mounting stub and cylindrical load:

$$L_T = L_m \left( \frac{M_T + M_S + M_H + r^2 M'_L}{M_T + M_S} \right), \quad (12)$$

where  $r$  is the velocity ratio of the horn referred to the wide end and  $M_H$  its effective mass (see appendix).

If the single horn is replaced by  $N$  horns in cascade, each of step-up velocity ratio  $r$ :

$$L_T = L_m \left[ \frac{M_T + M_S + M_{H1} + r^2 M_{H2} + (r^2)^2 M_{H3} \dots + (r^{N-1})^2 M_{HN} + (r^N)^2 M'_L}{M_T + M_S} \right], \quad (13)$$

where  $M_{H1}$ ,  $M_{H2}$ , ...,  $M_{HN}$  are the effective masses of horns 1, 2, ...,  $N$  referred to their own drive faces. Similar considerations apply to any combinations of such structures. The above considerations hold exactly for zero attenuation of the propagated wave; in the cases considered the velocity transformers are constructed in low loss metal in order closely to approximate to this condition.

## 3. Apparatus

### 3.1. Transducer and mechanical load

The transducer (Fig. 4) was a symmetrical window-type magnetostriector of 0.5 mm nickel laminations consolidated with Araldite type 1. The laminations were annealed in air at 800°C for one hour and cooled slowly.

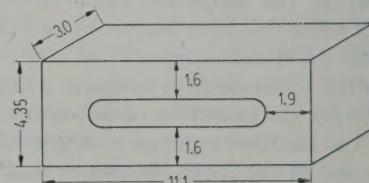


Fig. 4. Stack dimensions (in cm).

The transducer was supported in a water cooling bath (Figs. 5 and 6) by means of a half-wave stub with a nodal flange which supported the complete transducer-stub-load assembly. The

loads were screwed to the free end of the half wave mounting stub. All active vibrating surfaces within the cooling bath were covered with pressure release material to reduce acoustic radiation into the water.

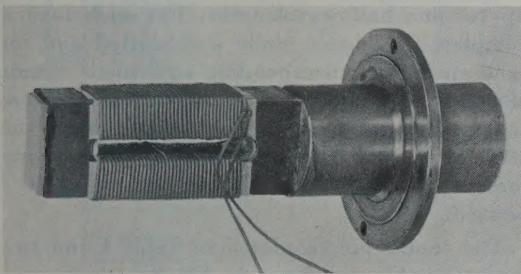


Fig. 5. Magnetostrictor with mounting stub.

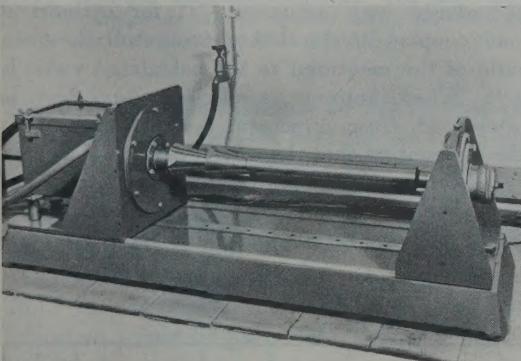


Fig. 6. Test bed assembly showing the mounted magnetostrictor coupled to a double horn-cylindrical stub load. The pick-up plate assembly is shown at the right.

A wide range of load resistances was provided by a number of tuned velocity transformers and cylindrical stubs which could be screwed together, so that the screwed joint always occurred at an antinode of movement. The order in which the load units were arranged was selected to give the desired amount of damping; by interposing several velocity transformers in cascade large amounts of damping could be obtained with load structures of small length. For example, interposing a 2/1 step up velocity transformer between the transducer and the load increases the damping at the drive face by about a factor of 4. The length of each load unit was an integral multiple of the half wavelength at the transducer resonance (19250 c/s); lateral dimensions were made less than a half-wavelength to reduce the amount of radial kinetic energy due to Poisson's ratio, and also to reduce higher plane wave modes of vibrations. The velocity transformers

were all identical of 2/1 diameter ratio with end diameters 7.8 cm and 3.9 cm. The cylindrical loads were 5 cm diameter. A thin film of a silicone compound was applied between the mating faces of the load units to ensure good transmission.

### 3.2. Measuring apparatus

The block schematic diagram (Fig. 7) shows the arrangement employed to obtain measurements of the transducer electrical impedance and

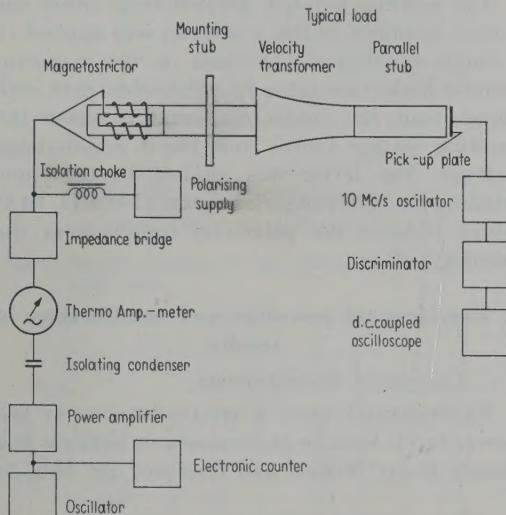


Fig. 7. Schematic diagram of apparatus used to measure electrical impedance and oscillatory amplitude.

of the amplitude of vibration of the free end of the load. For the accurate determination of the small alternating movements (of the order of  $5\mu$ ) an ultramicrometer designed in accordance with WHIDDINGTON [4] was used. This required the accurate location of an electrostatic pick-up plate close and parallel to the vibrating surface. To provide rapid location of this plate a specially designed test bed (Fig. 6) was employed and was massively constructed and mounted upon a substantial concrete bench to reduce the effect of extraneous vibration. The vibrating assembly and pick-up plate were mounted in separate housings which could be moved to any position on the test bed to accommodate loads of various lengths. At the same time the parallelism between the pick-up plate and the vibrating surface was maintained to a high order of accuracy ( $\pm 0.0005$  cm); their separation was adjusted by a micrometer head calibrated 0.00025 cm per small division, and the absolute value of the alternating movement could be obtained from the settings of this head.

In the block schematic (Fig. 7), the 10 Mc/s oscillator and discriminator form the electronic

equipment associated with the ultramicrometer. Low power impedance measurements were taken with the oscillator fed directly to the transducer via an inductance-resistance bridge. At high power levels an impedance bridge was used which dissipated only a small fraction (less than 1.5%) of the input power. Drive current was measured with a range of thermoammeters, and the frequency of the oscillator was continuously monitored with an electronic counter.

The exciting voltage, derived from either the power amplifier or the oscillator, was applied to a single winding of 143 turns on the magnetostrictor limbs through a 0.1  $\mu$ F condenser in each supply lead; the condensers served to isolate the exciting voltage source from the d. c. polarising voltage. The latter was applied to the same winding through two series chokes (100 mH, 10A) which isolated the polarising supply from the exciting voltage.

#### 4. Experimental procedure and consideration of results

##### 4.1. Low-power measurements

Experimental work is relatively easy at low power levels because the transducer behaves in a closely linear fashion and does not get hot. At

the same time much useful information can be obtained regarding the basic vibration properties of the particular system. Low level impedance measurements were taken with various amounts of damping imposed on the transducer by loads made of naval brass (B. S. S. 252) of total length up to nine half wavelengths. For each load a complete impedance circle was plotted and for each circle the corresponding equivalent circuit elements were calculated. All measurements were taken under the same electrical conditions of the transducer, which were: polarising magnetising force 15 oersted; exciting field less than  $10^{-3}$  oersted.

The results are tabulated in Table I and two typical circles are shown in Fig. 8.

Table I shows close agreement between the measured values of  $L_T$ , and those calculated in accordance with equation (11) for cylindrical loads coupled directly to the driving stub; the mean ratio of the measured to the calculated value is 0.96. When, however, a single step-up horn is interposed, close agreement is only obtained on the assumption that the velocity ratio is 1.7 (case  $r = 1.7$  in equation (12)). This differs from the horn diameter ratio (2/1) which should be equal to the velocity ratio when plane wave propaga-

Table I

System	$f_{em} = \omega_{em}/2\pi$	$R_e$	$L_e$	$L_m$	$R_m$	$L_T$	$R_T$	$L_L$	$R_L$	$1/k^2$	$k^2 Q$	$L_T$ calcul.	$\frac{L_T \text{ meas.}}{L_T \text{ calcul.}}$
	c/s	$\Omega$	mH	mH	$\Omega$	mH	$\Omega$	mH	$\Omega$	—	—	mH	—
Transducer	19530	16.5	0.500	17.0	29.8	—	—	—	—	31.9	1.49	—	—
Flanged Stub	19350	16.5	0.502	42.4	53.8	42.4	53.8	0	0	84.6	0.882	41.9	1.01
$F + \frac{\lambda}{2}$	19340	13.5	0.487	42.4	53.8	62.0	54.9	19.6	1.1	127	0.883	67.5	0.92
$F + \frac{2\lambda}{2}$	19360	13.0	0.483	42.4	53.8	87.2	50.6	44.8	— 3.2	181	0.930	91.0	0.96
$F + \frac{3\lambda}{2}$	19355	13.2	0.483	42.4	53.8	107	51.6	64.6	— 2.2	221	0.910	117	0.915
$F + \frac{4\lambda}{2}$	19345	13.7	0.487	42.4	53.8	132	52.6	89.6	— 1.2	132	0.893	142	0.930
$F + \frac{5\lambda}{2}$	19380	15.6	0.494	42.4	53.8	167	54.6	124.6	0.8	338	0.855	167	1.00
$F + H + \frac{3\lambda}{2}$	19240	13.7	0.488	42.4	53.8	282	58.1	240	4.3	578	0.823	407	0.698
$F + H + \frac{5\lambda}{2}$	19325	16.9	0.512	42.4	53.8	466	62.9	424	9.1	908	0.782	610	0.765
$F + H + \frac{7\lambda}{2}$	19305	14.5	0.496	42.4	53.8	637	64.2	595	10.4	1270	0.765	808	0.788
$F + H + \frac{9\lambda}{2}$	19323	15.5	0.503	42.4	53.8	732	71.5	710	17.7	1490	0.705	1010	0.746
$F + 2H + \frac{5\lambda}{2}$	19310	17.0	0.503	42.4	53.8	1360	84.0	1318	30.2	2700	0.605	—	—
$F + 2H + \frac{9\lambda}{2}$	19323	16.2	0.510	42.4	53.8	1850	98.8	1808	45.0	3620	0.533	—	—

##### CODE :

$F$  = Flanged mounting stub,  $\beta H$  = Velocity transformers,  $\beta \frac{\lambda}{2}$  = Parallel stub,  $\beta$  = an integer  
Structures were used in the order indicated from the transducer

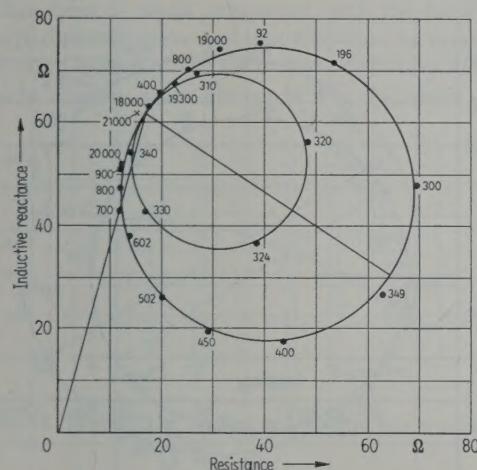


Fig. 8. Low power level impedance circles with identical electrical operating conditions. The large circle corresponds to zero applied load, and the small circle to a large applied load.

tion exists. To some extent this implies that the latter condition does not hold for the horns but is valid for the cylindrical loads where the measured kinetic energy checks closely with that calculated. This assumption is given added weight when it is noted that the large end diameter of the horn (7.8 cm) approaches a half-wavelength (8.75 cm) at which diameter radial modes of vibration would be prominent.

The effective horn ratio was measured directly as follows; a small 6 mm diameter pick up plate was located close (0.015 cm) to each end face and means were provided for moving both plates relative to the horn while keeping a fixed distance between them. The capacitances in the mounts were carefully equalised. When either plate was connected to a 120 V battery through a  $10 \text{ M}\Omega$  resistor, an alternating voltage was developed proportional to the amplitude of the face. The two voltages were measured for several positions of the plates. At each position the two plates were also connected together and their combined capacitance measured; this capacitance is least when the two gaps are equal. The results are plotted Fig. 9. The ratio obtained — 1.58 to 1 — agrees sufficiently closely with the ratio 1.7 to 1 obtained above.

Values of the product  $k^2Q$  (Section 2.5) are plotted against  $1/k^2$  in Fig. 10; the latter quantity is a measured value (derived from the electrical impedance measurements) and is proportional to the total effective mass of the particular load system. A steady reduction in the value of  $k^2Q$  occurs with increase in  $1/k^2$ ; this implies a

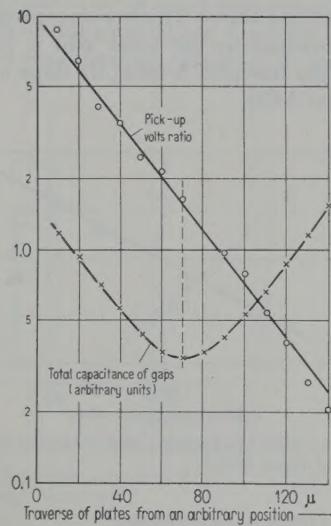


Fig. 9. Results relating to the direct measurement of a horn ratio.

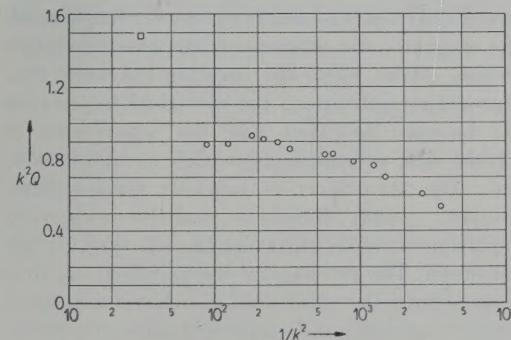


Fig. 10. Variation with load of the  $k^2Q$  product

steady reduction in drive face oscillatory amplitude due to the presence of mechanical loss in the load, in accordance with eq. (8). The large drop in  $k^2Q$  between the value for the free transducer and that for the mounted transducer is due to the sudden increase in loss on clamping the flange of the mounting stub. The slight increase in  $k^2Q$  with the first small increases in  $1/k^2$  is caused by the variation of the damping at this flange introduced by small changes in resonance frequency (up to 200 c/s) when the external loads are applied.

The mechanical  $Q$  for the naval brass is a useful constant and can be obtained from the tabulated values of  $R_L$  and  $L_L$ .

Thus

$$Q_L = \omega L_L / R_L = \omega \cot \Theta, \quad (14)$$

where  $\tan \theta$  is the slope of the curve of  $R_L$  plotted against  $L_L$ . The experimental curve (Fig. 11) shows negative values of  $R_L$  for very small values of  $L_L$ ; these are caused by the small resonance

shifts mentioned above. This becomes progressively less significant as the total load is increased and a straight line plot results; its slope indicates a  $Q$  value of 4470.

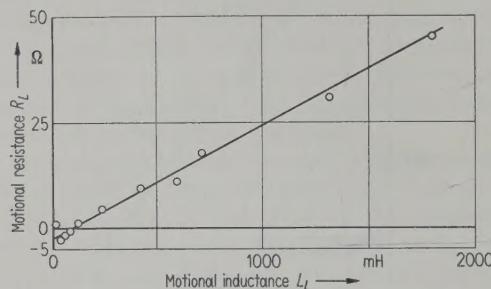


Fig. 11. The motional inductance and resistance for various naval brass loads.

#### 4.2. High-power measurements

At high power levels the experimental work is difficult because of heating and the interpretation of the results by linear theory is complicated. The magnetic and magnetostrictive non-linearity become severe when the exciting magnetic flux approaches saturation, the electrical impedance loci become distorted and the waveforms of current and voltage have a high harmonic content. The transducer is however mechanically resonant, usually sharply so, and the mechanical displacement of its vibrating faces is then closely sinusoidal. The mechanical waves which are propagated into the solid load also have sinusoidal particle motion and measurements of transmission properties can still be obtained with a high accuracy. It is also found experimentally that on account of the sharp resonance electrical measurements yield results which are amenable to calculation at power levels up to about 30% of the saturation value. Beyond this rough limit conventional linear methods of analysis fail completely. The following work therefore has been confined to investigations at power levels within the former range.

During the high level experimental work two impedance circles were obtained for the unloaded stub-mounted magnetostrictor, using in each case a constant exciting current (Fig. 12). The corresponding input powers at  $\omega_{em}$  were 560 W and 320 W for circles A and B respectively; the saturation power level of the transducer is approximately 1600 W. There is some evidence of nonlinearity in both circles, notably in the distribution of the frequency points on either side of electro-mechanical resonance, but it is small enough for the corresponding equivalent circuits to be derived on a conventional basis; these are

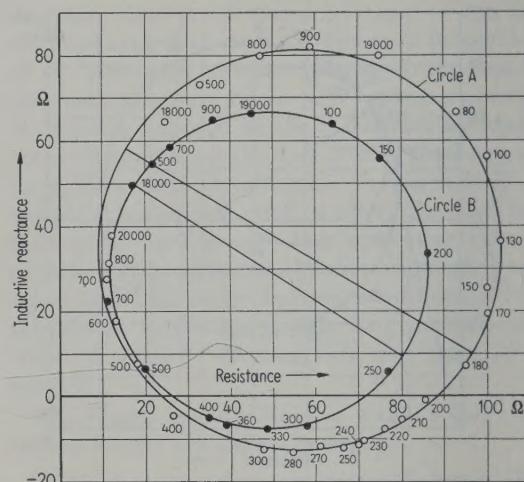


Fig. 12. High power level impedance circles; the resonant powers are 560 W and 320 W for circles A and B respectively.

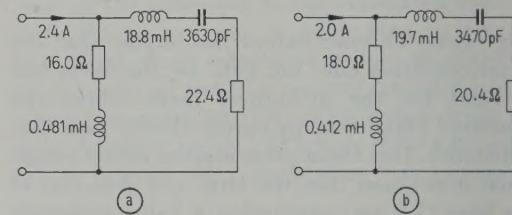


Fig. 13. Equivalent circuits for the circles A and B in Fig. 12 (polarising current: (a) 5.1 A, (b) 5.8 A).

shown in Fig. 13 together with the relevant electrical conditions of the transducer.

Measurements of oscillatory amplitude were first applied to the determination of the drive face movement when various amounts of loading were imposed upon the transducer, which was operated under the electrical conditions of circle A. The movements were measured with the ultramicrometer at the free end of the load structure; the drive face movement was then inferred from the known velocity transformation. This procedure is convenient experimentally but introduces the possibility of error due to wave attenuation within the load structure. Thus, calculations based upon the work of MASON [5] show that for a resonant stub

$$\frac{\xi_L}{\xi} = \frac{(-1)^n}{\cosh(n\pi/2Q_L)}, \quad (15)$$

where  $\xi_L$  is the oscillatory amplitude at the free end of the load and  $n = 1, 2, 3, \dots$ . For a stub half wavelength long constructed in material of  $Q$  equal to 100 (which corresponds to the largest high loss load used in the present work):

$$\xi_L/\xi = 0.988.$$

This error is small compared with the limits of experimental error and can therefore be ignored. Plotted values of the measured oscillatory amplitude against  $\alpha$  are shown in Fig. 14 where  $\alpha$  is

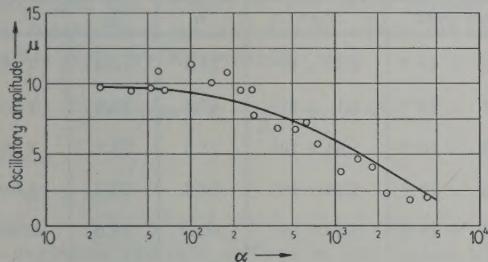


Fig. 14. The effect of loading on the drive face amplitude.

the ratio of the effective mass of the applied load to that of the transducer and mounting stub. The solid curve was calculated from eq. (5) assuming that the  $Q$  value for the naval brass used was 4470 (the value measured at low strain amplitudes) and also assuming the relevant equivalent circuit to be valid. The close agreement between the measured and calculated results justifies these assumptions. These results further indicate that load structures for transmission purposes can be optimumly designed to perform a given function purely on the basis of initial transducer measurements and the constants of the load material. In practice, this can result in a considerable saving in time and material.

Mechanical structures can be designed to provide a mechanical impedance at the transducer face equal to the acoustic impedance which would be presented to that face by particular liquid media. In the following work the range of loadings at the transducer centred about the characteristic impedance of water. The load material was cast iron, which has high mechanical loss per unit volume and thus requires a relatively short load for a given amount of damping. The  $Q$  value for the cast iron is 138; this value was determined in a similar fashion to that for naval brass, but the resonance value of the peak alternating strain was maintained at  $2 \times 10^{-4}$ . The plotted results (Fig. 15) show only a slight scatter which indicates (somewhat surprisingly for such a material as cast iron) that all the load elements had similar mechanical losses. Movement and input power measurements were taken at  $\omega_{em}$  for the cast iron loads listed in Table II and under the electrical conditions pertaining to circle B. Using the above  $Q$  value, and assuming it to be constant over the range of alternating strains experienced, the propagated power was calculated

for each load in accordance with eqn. (9) and (10); the ratio of this quantity to the input power gave the electromechanical efficiency in each case.

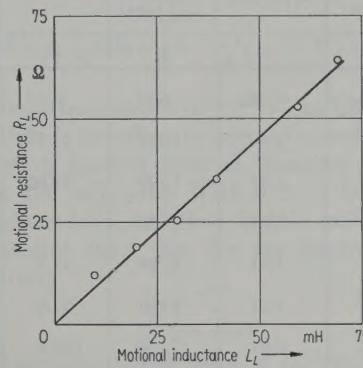


Fig. 15. The motional inductance and resistance for various cast iron loads.

The results are tabulated in Table II and in Fig. 16 the power and efficiency is expressed as a function of the relative loading  $R_L/R_m$ .  $R_L$  was obtained from the expression

$$R_L = \frac{\omega_m L_m}{Q_L} \left( \frac{M^*}{M_T + M_S} \right),$$

where  $M^*$  is the total effective mass of the applied load.

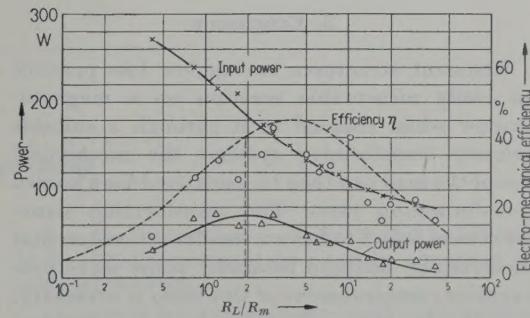


Fig. 16. Showing the electromechanical conversion properties as a function of the load.

The latter expression was evaluated from eqn. (11), (12) and (13) where applicable using effective mass values of 510 g and 740 g for the transducer and mounting stub respectively. The experimental results indicate a maximum value of efficiency and compare well with the efficiency figures calculated from eqn. (1) and (4) using equivalent circuit B, and shown in the broken line curve in Fig. 16. The ordinate shown in the broken line corresponds to the relative loading obtained with water on one face. When both faces are radiating into water nearly optimum efficiency (about 42 %) is obtained.

Table II

Applied mechanical structure	$M^*$ $M_T + M_S$	Effective mass of applied load ( $M^*$ )	$R_L$	Input power	$\xi$		$R_M$	$W_M$	$\eta_{em}$	$\frac{R_L}{R_m}$
					g	$\Omega$	W	cm peak	cgs	W
$\frac{\lambda}{2}$	0.502	630	8.57	271	318	$\times 10^{-6}$	$4.37 \times 10^5$	31.9	11.8	0.42
$\frac{2\lambda}{2}$	1.00	1260	17.10	239	292	$\times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^6$	67.6	28.3	0.84
$\frac{3\lambda}{2}$	1.51	1890	25.80	216	246	$\times 10^{-6}$	$1.64 \times 10^6$	71.6	33.1	1.26
$\frac{4\lambda}{2}$	2.01	2520	34.30	198	186	$\times 10^{-6}$	$2.20 \times 10^6$	54.8	27.7	1.68
$\frac{6\lambda}{2}$	3.01	3780	51.5	173	160	$\times 10^{-6}$	$3.29 \times 10^6$	60.6	35.0	2.52
$\frac{7\lambda}{2}$	3.51	4410	60.0	164	159	$\times 10^{-6}$	$3.84 \times 10^6$	69.7	42.4	2.95
$H + \frac{4\lambda}{2}$	6.01	7520	103.0	134	100	$\times 10^{-6}$	$6.53 \times 10^6$	47.0	35.0	5.03
$H + \frac{5\lambda}{2}$	7.50	9380	128.0	125	80	$\times 10^{-6}$	$8.15 \times 10^6$	37.5	30.0	6.28
$H + \frac{6\lambda}{2}$	9.00	11250	154	117	72.5	$\times 10^{-6}$	$9.80 \times 10^6$	37.1	31.7	7.57
$2H + \frac{3\lambda}{2}$	12.55	15700	215	105	64.8	$\times 10^{-6}$	$1.36 \times 10^7$	41.8	39.6	10.50
$2H + \frac{4\lambda}{2}$	16.7	20900	285	98	39.6	$\times 10^{-6}$	$1.81 \times 10^7$	20.4	21.0	13.90
$2H + \frac{5\lambda}{2}$	20.9	26100	357	92.6	30.0	$\times 10^{-6}$	$2.27 \times 10^7$	14.7	15.8	17.50
$3H + \frac{2\lambda}{2}$	24.1	30100	412	89.5	31.7	$\times 10^{-6}$	$2.62 \times 10^7$	19.0	21.2	20.20
$3H + \frac{3\lambda}{2}$	36.3	45300	621	83.0	26.1	$\times 10^{-6}$	$3.94 \times 10^7$	19.3	23.3	30.20
$3H + \frac{4\lambda}{2}$	49.6	62000	848	79.1	18.5	$\times 10^{-6}$	$5.38 \times 10^7$	13.3	16.8	41.40

### 5. Conclusion

Resonant structures having low loss produce an easily measurable reaction on a magnetostriktor when coupled to it through a suitable velocity transforming system; the mechanical loss of the load can then be calculated for a known transformation ratio. The transforming structures were found to have a smaller ratio than that theoretically deduced assuming plane wave propagation; measurement of this ratio is necessary, and can be obtained indirectly from electrical impedance measurements, or directly from oscillatory amplitude measurements at the end faces of the transformer.

Linear theory can be applied at power levels of about 30% of saturation; the impedance loci are circles and the frequency points are symmetrically disposed around the resonance frequency. At such levels linear theory can be used to predict the effect of loading upon the drive face amplitude. High loss load structures are useful in simulating liquid loads; they can be adjusted in small discrete steps and permit experimental verification of optimum loading conditions. The power propagated and the electromechanical efficiency can be obtained directly from ampli-

tude and input power measurements. Since the particle motion in the load is sinusoidal, the measurements are not invalidated by non-linearity of the transducer. Close agreement is obtained between such measurements and the results predicted from linear theory, providing the drive power is confined to the above limit.

For saturation drive conditions a theory which accounts for non-linearity is required; the above amplitude and input power measurements however are still valid and provide a reliable experimental method for determining the transducer conversion properties at such levels. In the work described, power levels have been limited by heating of the load, further work is in progress using water cooling where the coolant is applied through holes bored longitudinally through the load.

### Acknowledgements

The author is indebted to the Manager of Mullard Research Laboratories for permission to publish this paper, to Mr. R. A. KIMBER for the design of the test bed, and wishes to thank Mr. C. F. BROCKELSBY and Mr. E. A. NEFFIRAS for much fruitful discussion and advice.

(Received October 4th, 1955.)

## Appendix

*The effective mass of a resonant half wavelength exponentially tapered velocity transformer*

For plane wave propagation and sinusoidal vibration, the velocity at any plane normal to the longitudinal axis and distant  $x$  from the wide end is given by NEPPIRAS [6] thus

$$\dot{\xi}_x = \dot{\xi} (\cos \beta' x - \frac{\gamma}{2\beta'} \sin \beta' x) e^{\gamma x/2},$$

where

$$\beta' = \omega/c'$$

and  $c' = c/(1 - \gamma^2 c^2/4\omega^2)^{1/2}$ ,  $c$  = velocity of sound.  $\gamma$  expresses the rate of flare in accordance with the expression

$$A = A_0 e^{-\gamma x},$$

where  $A_0$  is the area of the wide end.

The total kinetic energy (K. E. tot) is obtained by integration over the entire volume; lateral kinetic energy due to Poisson's Ratio is small and is ignored.

$$\begin{aligned} \text{K. E. tot} &= \frac{1}{2} \varrho A_0 \dot{\xi}^2 \int_0^L \left( \cos \beta' x - \frac{\gamma \sin \beta' x}{2\beta'} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \varrho A_0 \dot{\xi}^2 \left( \frac{L}{2} + \frac{\gamma^2 L}{8\beta'^2} \right), \end{aligned}$$

where  $L$  = length of horn and  $\varrho$  = density of horn material.

If the effective mass  $M_H$  of the horn is referred to the wide end

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_H \dot{\xi}^2 &= \frac{1}{2} \varrho A_0 \dot{\xi}^2 \left( \frac{L}{2} + \frac{\gamma^2 L}{8\beta'^2} \right) \\ \text{i.e. } M_H &= \frac{1}{2} \varrho A_0 L \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{4\beta'^2} = M'_S (c'/c)^{5/2} \right]. \end{aligned}$$

For small horn ratios,  $(c'/c)^{5/2} \rightarrow 1$  and  $M_H \rightarrow M'_S$  where  $M'_S$  is the effective mass of a resonant half wavelength parallel stub of diameter equal to that at the wide end. With a 2 : 1 horn ratio,  $c'/c$  is about 1.05, and the effective mass is about 10% greater than that for the equivalent parallel stub.

## References

- [1] BUTTERWORTH, S. and SMITH, F. D., The equivalent circuit of the magnetostrictive oscillator. Proc. Phys. Soc. **43** [1931], 166.
- [2] HUNT, F. V., Electroacoustics. Harvard University Press (1954).
- [3] VAN DER BURGT, C. M., Outlines of magnetostrictive ferrite resonators and applications in filters and transducers. Philips Nat. Lab. Report No. 2778.
- [4] WHIDDINGTON, R., The ultramicrometer. Phil. Mag. **40** [1920], 394.
- [5] MASON, W. P., Electromechanical transducers and wave filters; 2nd ed. D. van Nostrand Co. Inc., New York 1948.
- [6] NEPPIRAS, E. A., A high frequency reciprocating drill. J. Sci. Instrum. **30** [1953], 72.

## Buchbesprechung

**Gravesaner Blätter**, eine Vierteljahresschrift für musikalische, elektroakustische und schallwissenschaftliche Grenzprobleme.

Redaktion: Gravesano, Herausgeber: Prof. Dr. HERMANN SCHERCHEN, verantwortliche Mitarbeiter: Dr. MEYER-EPPLER, Bonn; Dr. STEINECKE, Darmstadt; Dr. ENKEL, Köln; Dr. MOLES, Paris.

Jedes Heft ist begleitet von einer akustisch illustrierten Schallplatte. Alle Artikel erscheinen in der Originalsprache mit mehrsprachigen Resumés.

Einzelheft inkl. Schallplatte: 5,20 DM, Jahresabonnement mit 4 Schallplatten 18,— DM.

HERMANN SCHERCHEN bemüht sich in den letzten Jahren, alle neuen wissenschaftlichen Erkenntnisse und technischen Mittel, die der Erzeugung, Weiterentwicklung und Verbreitung der Musik dienen können, dem Musiker vertraut zu machen und umgekehrt auch dem Akustiker die Probleme der Musiker darzulegen. Das ist zwar ein begrüßenswertes, aber doch mühevolleres Bestreben, denn Sprache und Mentalität der Musiker einerseits und die der Wissenschaftler und Techniker andererseits unterscheiden sich weitgehend. Die «Gravesaner Blätter» sind eines der Mittel, die den Bemühungen HERMANN SCHERCHENS dienen sollen.

Von den 10 Beiträgen des 1. Heftes (Nr. 1, Juli 1955, 61 S., DIN A 5) werden einige Leser der «Acustica» folgende interessieren:

«La crise de la musique sérielle», von YANNIS XÉNAKIS, «Centro sperimentale elettroacustico Dr. Hermann Scherchen, Gravesano», Teil I (italienisch) von A. SCERRI, Teil II (deutsch) von K. WEISSE, «Correspondances parisiennes», von PIERRE SOUVITCHINSKY.

Alle anderen Beiträge sollen mehr der Unterrichtung der Musiker dienen und sind den Akustikern aus der Fachliteratur bekannt. Durch sein «Essai de vocabulaire graphique international de l'acoustique musicale et l'électroacoustique» (in Französisch, Deutsch und Englisch) will MOLES die Musiker an Hand von international — hoffentlich auch ihnen — verständlichen physikalischen Schemata, Zeichnungen und Diagrammen die Begriffe der Akustik lehren.

Die (technisch leider etwas unvollkommene) Schallplatte (45 U/min) bringt Demonstrationen zum SPRINGERSchen akustischen Zeitdehner und Zeitraffer.

G. R. SCHODDER

# NÄHERUNGSFORMELN FÜR EINIGE HÄUFIG VORKOMMENDE SCHALLEITER-KOMBINATIONEN

von C. KLEESATTEL

Cavitron Equipment Corporation, New York, USA

## Zusammenfassung

Vor allem in der Ultraschall-Technik werden häufig Schalleiter-Kombinationen verwendet, die sich aus  $\lambda/2$ -Gliedern,  $\lambda/4$ -Gliedern oder aus  $\lambda/2$ - und  $\lambda/4$ -Gliedern zusammensetzen. Hierfür werden Formelausdrücke abgeleitet, welche die Kräfte und Geschwindigkeiten an den Endflächen der Schalleiter als Funktion der Impedanzen, der inneren Dämpfung und der Abstimmung geben. Die Formeln können auch auf aktive Schalleiter, d. h. auf elektro-akustische Wandler und deren Kombination mit passiven Leitern, angewandt werden.

## Summary

Combinations of sound conduits, consisting of  $\lambda/2$  elements,  $\lambda/4$  elements or  $\lambda/2$  and  $\lambda/4$  elements are common in the technique of ultrasonics. Formulae are given for the forces and velocities on the end faces of the conduit as functions of impedance, internal friction and tuning. The formulae can also be applied to active sound conduits, e. g. to electro-acoustic transducers and their combinations with passive conduits.

## Sommaire

On emploie fréquemment, surtout dans la technique des ultrasons, des combinaisons de liaisons acoustiques constituées par des éléments en  $\lambda/2$ , en  $\lambda/4$ , ou en  $\lambda/2$  et en  $\lambda/4$ . On établit ici des expressions donnant les forces et vitesses aux faces terminales de ces liaisons en fonction des impédances, de l'amortissement interne, et de l'accord. Ces expressions peuvent être employées pour des liaisons acoustiques actives, c'est-à-dire pour des transducteurs électro-acoustiques et leurs combinaisons avec des liaisons passives.

## 1. Einführung

Wie bekannt, lassen sich auf longitudinal schwingende Schalleiter die Formeln der elektrischen Leitungstheorie anwenden. Die Auswertung dieser Formeln ist ziemlich umständlich, wenn der sehr häufige Fall einer Kombination von zwei Schalleitern gegeben ist, die an ein äußeres Medium gekoppelt sind, die innere Verluste haben, und die zudem noch bei einer von ihrer Resonanzfrequenz abweichenden Frequenz betrieben werden. Die im folgenden abgeleiteten Formeln sind Näherungsausdrücke, welche Resultate mit einem maximalen Fehler von  $\pm 1\%$  liefern, wenn für die Dämpfungs- und Phasenkonstanten die zugelassenen Höchstwerte eingesetzt werden. Der Fehler vermindert sich entsprechend, wenn kleinere Werte für die Dämpfungs- und Phasenkonstanten gewählt werden. Andererseits, wenn es auf größere Genauigkeit nicht ankommt, lassen sich die Formeln auch vorteilhaft für eine abschätzende Überschlagsrechnung mit Konstanten weit jenseits des eingeschränkten Bereiches verwenden.

Die Formeln werden für passive Schalleiter entwickelt. Man kann sie jedoch auf aktive Glieder ausdehnen, indem man die Erregerkraft als die Ersatzkraft eines elektro-akustischen Wandlers betrachtet.

## 2. Ableitung der Formeln

Abbildung 1 zeigt die Anordnung, für welche die Formeln entwickelt werden sollen. 1 und 2

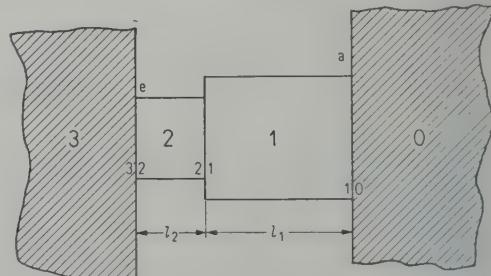


Abb. 1. Schalleiter 1 und 2 zwischen den Medien 0 und 3.  
a: Ausgangsseite, e: Eingangsseite.

sind Schalleiter, deren Endflächen mit den Medien 0 und 3 gekoppelt sind. Die Antriebskraft (Eingangsleistung) ist auf der linken Seite, an der Grenzfläche 23 angreifend, zu denken und wird mit  $P_{23}$  (oder  $P_e$ ) bezeichnet, während für die am Medium 0 angreifende Ausgangskraft  $P_{01}$  (oder  $P_a$ ) geschrieben wird. Der Doppelindex soll andeuten, daß sich die betreffende Größe allein auf die Grenzfläche bezieht. Alle „inneren“ Größen werden mit dem einfachen Index notiert. Für die Ableitung wird zunächst angenommen, daß

die Impedanz  $z_{01} = P_{01}/V_{01}$  reell sei (Abstrahlung in reflexionsfreies Medium), und daß die Impedanz des Mediums 3 gleich Null sei (Vakuum).

Definitionen:

$V_{ab}$  = Geschwindigkeit (Schallschnelle) der Grenzfläche  $ab$ ,  
 $P_{ab}$  = Kraft an der Grenzfläche  $ab$ ,  
 $z_{ab} = P_{ab}/V_{ab}$  = mechanische Impedanz, gemessen an der Grenzfläche  $ab$ ,  
 $z_i = \rho_i c_i F_i$  = akustische Impedanz des Schalleiters oder auch des angrenzenden Mediums,  
 $\rho$  = Dichte,  
 $c$  = Schallfortpflanzungsgeschwindigkeit,  
 $F$  = Querschnitt.

Die akustische Impedanz  $z_i$  wird bei vorhandener Dämpfung komplex. Für kleinere Absorptionskoeffizienten kann der Imaginärteil jedoch vernachlässigt werden.

Bezüglich der Schallgeschwindigkeit  $c$  sind folgende Unterscheidungen zu machen:

a) Die radialen Abmessungen der schwingenden Medien sind wesentlich kleiner als die Wellenlänge (Stabschwinger). Dann ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Longitudinalwelle

$$c_s = \sqrt{E/\rho}, \quad E = \text{Dehnungsmodul.} \quad (1)$$

b) Die radialen Abmessungen sind wesentlich größer als die Wellenlänge (Plattenschwinger). Dafür wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Längswelle

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1-\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad (2)$$

$\sigma$  = Poissonscher Modul.

c) Die radialen Abmessungen sind von der Größenordnung der Wellenlänge (Dispersionschwinger). In diesem Fall muß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit besonders gemessen oder berechnet werden. Im allgemeinen ist  $c_s < c_d < c_p$ .

Die akustische Impedanz  $\rho c_p$ , die sich im Fall b) ergibt, wird auch als Schallwellenwiderstand bezeichnet. Die Impedanzen in den Fällen a) und c) können mit dem Wellenwiderstand der elektrischen Leitungen verglichen werden.

Der die innere Dämpfung ausdrückende Absorptionskoeffizient  $\beta$  wird aus folgenden Beziehungen gewonnen:

$$\beta = \frac{\ln 2}{2 t_{1/2}} \quad (3)$$

( $t_{1/2}$  = Eindringtiefe, bei der die Intensität die Hälfte des Anfangswertes beträgt; für eine ebene fortschreitende Welle.)

oder  $\beta = \pi/\lambda Q$  (4)

mit

$\lambda$  = Wellenlänge,

$Q = \sqrt{3} f_R/\Delta f$  = Gütezahl des Schalleiters,

$f_R$  = Resonanzfrequenz, (4a)

$\Delta f$  = Bandbreite für halbe Amplitude.

Für den praktischen Gebrauch müssen natürlich in  $\beta$  auch die Verluste berücksichtigt werden, die durch die Halterung am Rande der Schwinger entstehen (Randdämpfung). Das bereitet keine großen Schwierigkeiten, wenn  $\beta$  durch eine  $Q$ -Messung nach Formel (4) bestimmt wird.

Die sechs verschiedenen Fälle, welche anschließend behandelt werden sollen, sind in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I

Fall	$l_1$ gleich oder angenähert gleich:	$l_2$ gleich oder angenähert gleich:
I	$n_1 \lambda/2$	0
II	$(2n_1 - 1) \lambda/4$	0
III	$n_1 \lambda/2$	$n_2 \lambda/2$
IV	$(2n_1 - 1) \lambda/4$	$(2n_2 - 1) \lambda/4$
V	$n_1 \lambda/2$	$(2n_2 - 1) \lambda/4$
VI	$(2n_1 - 1) \lambda/4$	$n_2 \lambda/2$

Für die Doppelschwinger unter III, IV, V und VI ergibt sich eine außerordentliche Vielfalt möglicher Kombinationen, da sich die beiden Schalleiter in folgender Hinsicht unterscheiden können:

Länge ( $n$ ),  
Typ ( $\lambda/4$  oder  $\lambda/2$ ),  
Phasenkonstante,  
Dämpfungskonstante,  
Querschnitt,  
Schallgeschwindigkeit,  
Dichte.

Die der Leitungstheorie entnommenen Grundformeln lauten nun in analoger Schreibweise:

$$P_{12} = P_{01} \cosh G_1 + z_1 V_{01} \sinh G_1, \quad (5)$$

$$V_{12} = V_{01} \cosh G_1 + \frac{1}{z_1} P_{01} \sinh G_1;$$

$$P_{23} = P_{12} \cosh G_2 + z_2 V_{12} \sinh G_2, \quad (6)$$

$$V_{23} = V_{12} \cosh G_2 + \frac{1}{z_2} P_{12} \sinh G_2.$$

Darin bedeuten

$$G = B + jA, \quad B = \beta l, \quad A = \alpha l \quad (7)$$

mit  $\beta$  = Dämpfungskonstante ((3), (4)),

$\alpha = 2\pi f/c$  = Phasenkonstante,

$l$  = Länge,

$f$  = Frequenz der erregenden Kraft.

Für den hyperbolischen Sinus und Cosinus eines komplexen Argumentes gelten die Beziehungen

$$\cosh(B + jA) = \cosh B \cos A + j \sinh B \sin A, \quad (8)$$

$$\sinh(B + jA) = \sinh B \cos A + j \cosh B \sin A.$$

Da sich die zu entwickelnden Formeln nahe an die Sonderfälle  $\lambda/2$  und  $\lambda/4$  anschließen sollen, werden Einschränkungen vorgesehen, die auf weitgehend vereinfachte Annäherungsausdrücke führen.

a) Einschränkung betreffs Dämpfung

$$0 \leq B \leq 0,1.$$

Damit gilt

$$\cosh B \approx 1, \quad \sinh B \approx B. \quad (9)$$

Mit  $B = \beta l = 0,1$  und  $l = \lambda/4$  folgt aus Formel (4) ein  $Q$  von 7,85, d. h., die kinetische bzw. die elastische Energie eines solchen Resonators wäre gerade 25 % größer als die pro Periode dissipierte Energie. Mit Gl. (4a) ergibt sich für die Bandbreite  $\Delta f = 0,221 f_R$ .

b) Einschränkung betreffs Phase

Für den  $\lambda/2$ -Schwinger wird

$$\alpha l = 2\pi f l / c = n\pi + A \quad (10)$$

gesetzt. Daraus folgt

$$A = 2\pi \left( \frac{fl}{c} - \frac{n}{2} \right). \quad (11)$$

Einschränkung:  $-0,1 \leq A \leq +0,1$ .

Damit ergibt sich für einen  $\lambda/2$ -Schwinger als höchst zulässige Abweichung

$$\frac{fl}{(fl)_{\text{Res}}} = 1 \pm \frac{1}{10\pi n}.$$

(Index Res bedeutet „bei Resonanz“)

Ebenso wie bei der Dämpfung kann man den angezeigten Wert überschreiten, wenn es auf größere Genauigkeit nicht ankommt. Führt man Gl. (10) in die Winkelfunktionen ein, so ergibt sich

$$\cos(n\pi + A) \approx \pm 1, \quad \sin(n\pi + A) \approx \pm A. \quad (12)$$

Die Vorzeichen gehen aus der Tabelle II hervor. Entsprechend setzt man für den  $\lambda/4$ -Schwinger

$$\alpha l = 2\pi f l / c = \frac{\pi}{2} (2n-1) + A', \quad (13)$$

woraus sich

$$A' = 2\pi \left[ \frac{fl}{c} - \frac{1}{4} (2n-1) \right] \quad (14)$$

ergibt, mit der Einschränkung  $-0,1 \leq A' \leq +0,1$ . Für den  $\lambda/4$ -Schwinger folgt daraus als zulässige Abweichung

$$\frac{fl}{(fl)_{\text{Res}}} = 1 \pm \frac{1}{5\pi(2n-1)}.$$

Tabelle II

	signum cosinus	signum sinus
$A > 0$ $n = 1, 3, 5, \dots$	—	—
$A > 0$ $n = 2, 4, 6, \dots$	—	—
$A < 0$ $n = 1, 3, 5, \dots$	—	+
$A < 0$ $n = 2, 4, 6, \dots$	+	—

Einsetzen von Gl. (13) in die Winkelfunktionen liefert

$$\cos \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} + A' \right] \approx \pm A', \quad (15)$$

$$\sin \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} + A' \right] \approx \pm 1.$$

Die Vorzeichenverhältnisse gehen aus Tabelle III hervor.

Tabelle III

	signum cosinus	signum sinus
$A' > 0$ $n = 1, 3, 5, \dots$	—	—
$A' > 0$ $n = 2, 4, 6, \dots$	—	—
$A' < 0$ $n = 1, 3, 5, \dots$	+	—
$A' < 0$ $n = 2, 4, 6, \dots$	—	—

Die Resultatformeln in Tabelle IV werden schließlich durch Zusammenfassung von Gl. (5) und (6) gefunden, unter Verwertung von Gl. (7), (8), (9) und (12); bzw. (7), (8), (9) und (15); bzw. (7), (8), (9), (12) und (15). — Die Vorzeichenzahlen  $S$  sind der Tabelle V zu entnehmen. — Beim Ausmultiplizieren der Gleichungen ergeben sich auch Produkte dritten und vierten Grades von  $A$  und  $B$ , die vernachlässigt worden sind, da sie nach den oben festgesetzten Einschränkungen nicht größer als  $10^{-3}$  bzw.  $10^{-4}$  werden können.

3. Erläuterungen zum Gebrauch der Formeln in Tabelle IV

a) Gebrauch der Vorzeichenschemata (Tabelle V)

In den Sonderfällen

$$A = 0,$$

$A_1$  oder  $A_2$  gleich Null und

$A_1$  und  $A_2$  gleich Null

Tabelle IV

Fall	Vorzeichenschema (Tabelle V)	Eingangskraft durch Ausgangskraft	Eingangsgeschwindigkeit durch Ausgangsgeschwindigkeit
$n \frac{\lambda}{2}$ (I)	I	$\frac{P_{12}}{P_{01}} \approx S_1 \left( 1 + \frac{z_1}{z_{01}} B \right) + j S_2 A \left( B + \frac{z_1}{z_{01}} \right)$	$\frac{V_{12}}{V_{01}} \approx S_1 \left( 1 + \frac{z_{01}}{z_1} B \right) + j S_2 A \left( B + \frac{z_{01}}{z_1} \right)$
$(2n-1) \frac{\lambda}{4}$ (II)	II	$\frac{P_{12}}{P_{01}} \approx S_1 A' \left( 1 + \frac{z_1}{z_{01}} B \right) + j S_2 \left( B + \frac{z_1}{z_{01}} \right)$	$\frac{V_{12}}{V_{01}} \approx S_1 A' \left( 1 + \frac{z_{01}}{z_1} B \right) + j S_2 \left( B + \frac{z_{01}}{z_1} \right)$
$n_1 \frac{\lambda}{2}$ $n_2 \frac{\lambda}{2}$ (III)	III	$\frac{P_{23}}{P_{01}} \approx S_1 \left( 1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_1 + \frac{z_2}{z_{01}} B_2 + \frac{z_2}{z_1} B_1 B_2 \right) +$ $+ S_2 A_1 A_2 \frac{z_2}{z_1} +$ $+ j S_3 A_1 \left( \frac{z_1}{z_{01}} + \frac{z_2}{z_1} B_2 + B_1 \right) +$ $+ j S_4 A_2 \left( \frac{z_2}{z_{01}} + \frac{z_2}{z_1} B_1 + B_2 \right)$	$\frac{V_{23}}{V_{01}} \approx S_1 \left( 1 + \frac{z_{01}}{z_1} B_1 + \frac{z_{01}}{z_2} B_2 + \frac{z_1}{z_2} B_1 B_2 \right) +$ $+ S_2 A_1 A_2 \frac{z_1}{z_2} +$ $+ j S_3 A_1 \left( \frac{z_{01}}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} B_2 + B_1 \right) +$ $+ j S_4 A_2 \left( \frac{z_{01}}{z_2} + \frac{z_1}{z_2} B_1 + B_2 \right)$
$(2n_1-1) \frac{\lambda}{4}$ $(2n_2-1) \frac{\lambda}{4}$ (IV)	IV	$\frac{P_{23}}{P_{01}} \approx S_1 \left( \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_{01}} B_1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_2 + B_1 B_2 \right) +$ $+ S_2 A'_1 A'_2 +$ $+ j S_3 A'_1 \left( \frac{z_2}{z_{01}} + \frac{z_2}{z_1} B_1 + B_2 \right) +$ $+ j S_4 A'_2 \left( \frac{z_1}{z_{01}} + \frac{z_2}{z_1} B_2 + B_1 \right)$	$\frac{V_{23}}{V_{01}} \approx S_1 \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_{01}}{z_2} B_1 + \frac{z_{01}}{z_1} B_2 + B_1 B_2 \right) +$ $+ S_2 A'_1 A'_2 +$ $+ j S_3 A'_1 \left( \frac{z_{01}}{z_2} + \frac{z_1}{z_2} B_1 + B_2 \right) +$ $+ j S_4 A'_2 \left( \frac{z_{01}}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} B_2 + B_1 \right)$
$n_1 \frac{\lambda}{2}$ $(2n_2-1) \frac{\lambda}{4}$ (V)	V	$\frac{P_{23}}{P_{01}} \approx S_1 A_1 \left( \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_{01}} B_1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_2 \right) +$ $+ S_2 A'_2 \left( 1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_1 + \frac{z_2}{z_{01}} B_2 \right) +$ $+ j S_3 \left( \frac{z_2}{z_{01}} + \frac{z_2}{z_1} B_1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_2 \right) +$ $+ j S_4 A_1 A'_2 \frac{z_1}{z_{01}}$	$\frac{V_{23}}{V_{01}} \approx S_1 A_1 \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_{01}}{z_2} B_1 + \frac{z_{01}}{z_1} B_2 \right) +$ $+ S_2 A'_2 \left( 1 + \frac{z_{01}}{z_1} B_1 + \frac{z_{01}}{z_2} B_2 \right) +$ $+ j S_3 \left( \frac{z_{01}}{z_2} + \frac{z_1}{z_2} B_1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_2 \right) +$ $+ j S_4 A_1 A'_2 \frac{z_{01}}{z_1}$
$(2n_1-1) \frac{\lambda}{4}$ $n_2 \frac{\lambda}{2}$ (VI)	VI	$\frac{P_{23}}{P_{01}} \approx S_1 A'_1 \left( 1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_1 + \frac{z_2}{z_{01}} B_2 \right) +$ $+ S_2 A_2 \left( \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_{01}} B_1 + \frac{z_1}{z_{01}} B_2 \right) +$ $- j S_3 \left( \frac{z_1}{z_{01}} + B_1 + \frac{z_2}{z_1} B_2 + \frac{z_2}{z_{01}} B_1 B_2 \right) +$ $+ j S_4 A'_1 A_2 \frac{z_2}{z_{01}}$	$\frac{V_{23}}{V_{01}} \approx S_1 A'_1 \left( 1 + \frac{z_{01}}{z_1} B_1 + \frac{z_{01}}{z_2} B_2 \right) +$ $+ S_2 A_2 \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_{01}}{z_2} B_1 + \frac{z_{01}}{z_1} B_2 \right) +$ $- j S_3 \left( \frac{z_{01}}{z_1} + B_1 + \frac{z_1}{z_2} B_2 + \frac{z_{01}}{z_2} B_1 B_2 \right) +$ $+ j S_4 A'_1 A_2 \frac{z_{01}}{z_2}$

Tabelle V  
(g:  $n$  ist gerade, u:  $n$  ist ungerade)

Vorzeichenschema I

A	> 0		< 0	
	g	u	g	u
$S_1$	+ 1	- 1	- 1	- 1
$S_2$	+ 1	- 1	- 1	+ 1

Vorzeichenschema II

A'	> 0		< 0	
	g	u	g	u
$S_1$	+ 1	- 1	- 1	- 1
$S_2$	- 1	+ 1	+ 1	- 1

Vorzeichenschema III

A <sub>1</sub>	> 0		< 0		> 0		< 0	
	g	u	g	u	g	u	g	u
$A_2$	> 0		< 0		< 0		> 0	
$n_1 + n_2$	g	u	g	u	g	u	g	u
$S_1$	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1
$S_2$	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1
$S_3$	+ 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1
$S_4$	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1

Vorzeichenschema IV

A'_1	> 0		< 0		> 0		< 0	
	g	u	g	u	g	u	g	u
$A'_2$	> 0		< 0		< 0		> 0	
$n_1 + n_2$	g	u	g	u	g	u	g	u
$S_1$	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1
$S_2$	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1	+ 1
$S_3$	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1
$S_4$	- 1	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1

Vorzeichenschema V

A <sub>1</sub>	> 0		< 0		> 0		< 0	
	g	u	g	u	g	u	g	u
$A'_2$	> 0		< 0		< 0		> 0	
$n_1 + n_2$	g	u	g	u	g	u	g	u
$S_1$	- 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1
$S_2$	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1
$S_3$	- 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	+ 1
$S_4$	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1

Vorzeichenschema VI

A'_1	> 0		0		> 0		< 0	
	g	u	g	u	g	u	g	u
$A_2$	> 0		0		< 0		0	
$n_1 + n_2$	g	u	g	u	g	u	g	u
$S_1$	+ 1	- 1	1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1
$S_2$	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1
$S_3$	- 1	+ 1	1	+ 1	- 1	- 1	- 1	+ 1
$S_4$	+ 1	- 1	1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1

benutze man die verbleibenden Größen. Es finden sich dann mehrere Spalten für den betreffenden Fall, die alle zum gleichen Ergebnis führen. Beispiel: Formel (III) (Tabelle IV), Schema III (Tabelle V),  $A_1 = 0$ ;  $A_2 > 0$ ;  $n_1 + n_2$  ungerade. Die zweite oder die achte Spalte des Vorzeichenschemas ist zu gebrauchen. Die zu  $S_2$  und  $S_3$  gehörigen Koeffizienten verschwinden.

### b) Austauschung der Veränderlichen

Man setze  $P_{01} = z_{01} V_{01}$ , wenn  $P_e$  als Funktion von  $V_{01}$  gewünscht wird. Entsprechend setze man  $V_{01} = P_{01}/z_{01}$ , wenn  $V_e$  als Funktion von  $P_{01}$  gesucht wird (Index  $e$  = Eingang).

### c) Ausgangsimpedanz gleich Null ( $z_{01} = 0$ )

c<sub>1</sub>) In der Kraftformel multipliziere man beide Seiten der Gleichung mit  $P_{01}$  und setze darauf  $P_{01}/z_{01} = V_{01}$ . Mit  $P_{01} = 0$  ergibt sich dann der gesuchte Ausdruck.

c<sub>2</sub>) In der Geschwindigkeitsformel setze man bloß  $z_{01} = 0$ .

### d) Berechnung der Verlustleistung

Die Verlustleistung in den Schalleitern ist

$$N_v/P_{01} V_{01} = \operatorname{Re}(P_e V_e / P_{01} V_{01}) - 1 \quad (16)$$

mit  $N_v$  = Verlustleistung.

Für den Fall, daß die Ausgangsimpedanz  $z_{01}$  verschwindet, vereinfacht sich Gl. (16) zu

$$N_v = \operatorname{Re}(P_e V_e). \quad (16a)$$

### e) Berechnung des Wirkungsgrades der Schalleiter

Der Wirkungsgrad der Schalleiter hängt von ihren inneren Verlusten ab, ferner von der Dämpfung, die durch die Halterung verursacht wird (Randdämpfung). Die Schallübertragung vollzieht sich dann mit einem Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{Re}(P_e V_e / P_{01} V_{01})}. \quad (17)$$

### f) Berechnung des Impedanzverhältnisses $z_e/z_a$

Das Verhältnis von Eingangsimpedanz zu Ausgangsimpedanz ist

$$z_e/z_a = P_e V_{01} / P_{01} V_e. \quad (18)$$

Hierzu ist ein Zahlenbeispiel gegeben, repräsentiert durch die Kurven in Abb. 2 und Abb. 3. Eine Zweistoffplatte dieser Art wird häufig als „Impedanztransformator“ bezeichnet und ist von verschiedenen Autoren behandelt worden [1]. Die Phasenbedingung, die erfüllt werden muß, lautet  $z_1 \tan \alpha_1 = -z_2 \tan \alpha_2$ . Das vorliegende Beispiel  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$  bildet einen Sonderfall, insofern als die Transformation ein Maximum erreicht. Für 800-kHz-Quarzplatten verwandte der

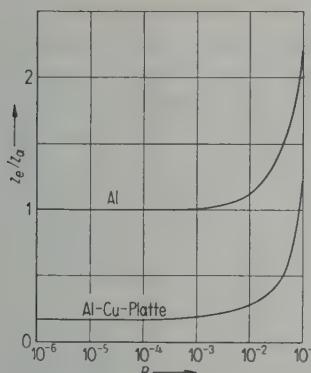


Abb. 2. Impedanzverhältnis  $z_e/z_a$  als Funktion der inneren Dämpfung  $B$ . Die obere Kurve gilt für eine einseitig mit Wasser belastete Aluminiumplatte ( $\lambda/2; n = 1$ ); die untere Kurve für eine zusammengesetzte  $\lambda/2$ -Platte, bestehend aus einem Kupferabschnitt ( $\lambda/4; n = 1$ ) und einem Aluminiumabschnitt ( $\lambda/4; n = 1$ ), mit der Wasserlast auf der Kupferseite.

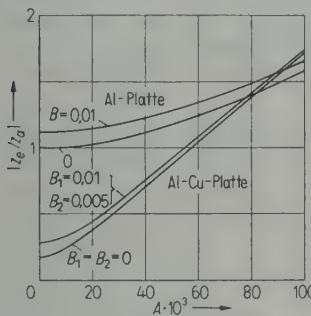


Abb. 3. Betrag des Impedanzverhältnisses  $z_e/z_a$  als Funktion der Verstimmung  $A$  mit der Dämpfung  $B$  als Parameter. Die Materialien sind die gleichen wie im Beispiel zur Abb. 2.

Verfasser mit Erfolg eine Kupfer-Aluminium-Verschweißung, die in Deutschland unter dem Namen „Cupal“ in Plattenform hergestellt wird [2]. Eine nützliche Anordnung für den tieferen Frequenzbereich ist beispielsweise die Kombination zweier  $\lambda/4$ -Zylinder gleichen Materials aber verschiedener Durchmesser. Die Impedanztransformation wird dann gleich dem Quadrat des Durchmesserverhältnisses [3].

### g) Die Eingangsleistung :

$$N_e/P_{01} V_{01} = \operatorname{Re}(P_e V_e / P_{01} V_{01}). \quad (19)$$

### h) Der Phasenwinkel zwischen Eingangskraft und -geschwindigkeit

Man berechne zuerst die Phasenwinkel  $\varphi_p$  und  $\varphi_v$  zwischen den Kräften und Geschwindigkeiten. Damit wird dann der Phasenwinkel zwischen Eingangskraft und Eingangsgeschwindigkeit

$$\varphi_e = \varphi_p - \varphi_v. \quad (20)$$

### i) Die Impedanz $z_{01}$ sei komplex

Die in der Tabelle IV zusammengestellten Formeln sind für reelles  $z_{01}$  geschrieben worden. Es bereitet jedoch keine großen Schwierigkeiten, ein komplexes  $z_{01}$  einzuführen unter Verwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned} z_{01} &= z_{01} (\cos \psi + j \sin \psi), \\ \frac{1}{z_{01}} &= \frac{1}{z_{01}} (\cos \psi - j \sin \psi). \end{aligned} \quad (21)$$

Auf Formel I in Tabelle IV angewandt, erhält man damit:

$$\begin{aligned} P_{12}/P_{01} &= S_1 [1 + B(z_1/z_{01}) \cos \psi] + \\ &+ S_2 A(z_1/z_{01}) \sin \psi + \\ &+ j[S_2 A[B + (z_1/z_{01}) \cos \psi] - \\ &- S_1(z_1/z_{01}) \sin \psi], \end{aligned} \quad (\text{Ia})$$

$$\begin{aligned} V_{12}/V_{01} &= S_1 [1 + B(z_{01}/z_1) \cos \psi] - \\ &- S_2 A(z_{01}/z_1) \sin \psi + \\ &+ j[S_2 A[B + (z_{01}/z_1) \cos \psi] + \\ &+ S_1(z_{01}/z_1) \sin \psi]. \end{aligned}$$

Man sieht, daß der Imaginärteil für kleinere Phasenwinkel leicht durch entsprechende Wahl von  $A$  zum Verschwinden gebracht werden kann, wobei zu beachten ist, daß  $\psi$  selbst auch mehr oder minder von der Frequenz abhängt. Für größere  $\psi$  hat die Formel wenig Bedeutung, da das System im praktischen Fall bei einer anderen Frequenz betrieben würde.

### k) Aktive und passive Schalleiter; Ersatzkraft

Passive Schalleiter sind solche, die vermöge ihrer inneren Dämpfung Schallenergie in Wärme umwandeln aber sonst keinen Energieaustausch bewirken. Die aktiven Schalleiter hingegen führen dem System mechanische Energie zu, oder ziehen mechanische Energie ab, und werden im allgemeinen als elektroakustische Wandler bezeichnet. Die anschließenden Betrachtungen beschränken sich auf Wandler, welche eine Antriebsfunktion ausüben, d. h. den Schalleitern mechanische Energie zuführen. Zunächst ist in Tabelle VI angegeben, welcher der Schwingen in den verschiedenen Kombinationen (siehe Tabellen I und IV) jeweils passiv oder aktiv sein kann.

Tabelle VI

Fall	Schalleiter 1	Schalleiter 2
I	aktiv oder passiv	
II	aktiv oder passiv	
III	passiv	aktiv oder passiv
IV	passiv	aktiv oder passiv
V	passiv	aktiv oder passiv
VI	passiv	aktiv oder passiv

Enthält die Anordnung ein aktives Glied, so muß die entsprechende Ersatzkraft ( $P_E$ ), welche dann an die Stelle der bisherigen Eingangskraft tritt, eingeführt werden. Für einen Wandler konstanten Querschnitts gilt

$$P_E = F \int_{-\gamma_1}^{\gamma_2} s_T(x) \cos \gamma \, dy, \quad \gamma_1 = 2\pi L_1/\lambda. \quad (22)$$

Darin soll  $\gamma = 0$  mit einem Schwingungsknoten zusammenfallen; während  $L_1$  und  $L_2$  die Längen der Elektroden bzw. der Bewicklung, vom Schwingungsknoten aus gemessen, bedeuten.  $s_T(x)$  ist die mechanische Längsspannung, die im Wandermaterial durch die elektrische bzw. magnetische Einwirkung ausgelöst wird. Für den Fall, daß diese nicht von  $x$  abhängt, erhält man für die Ersatzkraft die einfache Formel

$$P_E = s_T F [\sin(2\pi L_1/\lambda) + \sin(2\pi L_2/\lambda)]. \quad (23)$$

Beispiel:  $L_1 = L_2 = \lambda/4$  liefert als Ersatzkraft

$$P_E = 2 s_T F. \quad (23a)$$

Die Gl. (23a) ist auch für den sogenannten  $\lambda/2$ -Dickenschwinger (z. B. Quarzplatte) gültig.

Eine besondere Behandlung ist erforderlich, falls sich ein Wandler zwischen zwei Schalleitern befindet. Das Vorgehen möge an folgendem Beispiel erläutert werden: Ein System bestehe aus

Medium 0  
Schalleiter 1, passiv,  
Schalleiter 2, aktiv,  
Schalleiter 3, passiv.

Die Anwendung der Formeln (III), (IV), (V) oder (VI) von Tabelle IV führt auf die Ausdrücke

$$\tilde{P}_{23} = f(P_{01}) \quad \text{und} \quad \tilde{V}_{23} = g(V_{01}).$$

Darin deutet der Pfeil an, daß von „rechts“ nach „links“ gerechnet wurde. Für den links verbleibenden Schalleiter 3 muß nun die Antriebskraft  $\tilde{P}_{23}$  (jetzt von links nach rechts gerechnet) so gewählt werden, daß die Bedingung  $\tilde{V}_{23} = \tilde{V}_{23}$  erfüllt wird. Damit wird die Gesamtantriebskraft, die gleich der Ersatzkraft des Wandlers sein muß, gleich

$$P_{23} = \tilde{P}_{23} + \tilde{P}_{23}.$$

Es handelt sich um nichts anderes als um eine einfache Parallelschaltung von Schalleitern (Vierpolen), wie leicht einzusehen ist. Besteht ein solches System aus lauter  $\lambda/2$ -Teilen, so spielt es keine Rolle, an welchem der Leiter man sich die

Ersatzkraft angreifend denkt, immer unter der Voraussetzung, daß  $A$  und  $B$  hinreichend klein sind.

Es würde zu weit führen, auf die große Zahl weiterer Kombinationsmöglichkeiten einzugehen. Die obigen Ausführungen sollten jedoch gezeigt haben, daß die gegebenen Formeln auch bei Schalleitern, die sich aus mehr als zwei Teilen aufbauen, vorteilhaft angewandt werden können.

l) Die Impedanz des Mediums 3 in Abb. 1 sei endlich:  $z_{34} > 0$

Eine zusätzliche Impedanz auf der linken Seite kann durch Anwendung des Parallelschaltungskonzeptes, wie im Absatz 3k) beschrieben, berücksichtigt werden.

m) Vorschlag betreffs Maßsystem

Um die Produkte „Geschwindigkeit  $\times$  Kraft“ unmittelbar in Watt zu erhalten, empfiehlt es sich, die in Tabelle VII zusammengestellten Einheiten zu gebrauchen.

Tabelle VII

Größe	Maßsystem 1	Maßsystem 2
Geschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$	$cm \cdot s^{-1}$
Kraft	Newton $= 10^5$ dyn $= 0,102$ kilopond	Sthen [4] $= 10^7$ dyn $= 10,2$ kilopond
Leistung	Watt $= 1m \cdot Newton \cdot s^{-1}$	$= Watt$ $1 cm \cdot Sthen \cdot s^{-1}$
Masse	kg	Inert [5] $= 10^7$ gramm
mechanische Impedanz	$Newton \cdot m^{-1} \cdot s$	$Sthen \cdot cm^{-1} \cdot s$

Das Maßsystem 2 hat den Vorteil, daß man sich nur eine Zehnerpotenz zu merken braucht, nämlich  $10^7$ . Ausgehend von der Energie-Einheit  $1 \text{Ws} = 1 \text{Joule} = 10^7 \text{erg} = 10^7 \text{cm} \cdot \text{dyn}$ , erhält man als Krafteinheit  $10^7 \text{dyn}$  und als Masseneinheit  $10^7$  gramm. (Eingegangen am 28. Oktober 1955.)

#### Schrifttum

- [1] VON SANDEN, K., Siemens-Reiniger-Werke AG, Erlangen.
- [2] Versuche ausgeführt im Juli 1953. Laboratorium der Ultrason-Argentina-S. R. L., Buenos Aires.
- [3] BALAMUTH, L., Mechanical impedance transformers in relation to ultrasonic machining. J. acoust. Soc. Amer. 26 [1954], 934.
- [4] FISCHER, J., Einführung in die klassische Elektrodynamik. Springer-Verlag, Berlin 1936, S. 176.
- [5] Abgeleitet von „Inertia“. Vorschlag des Verfassers.

# SOME EXPERIMENTS IN A ROOM AND ITS ACOUSTIC MODEL

by A. F. B. NICKSON and R. W. MUNCEY

Division of Building Research, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia\*

## Summary

The feasibility of three dimensional acoustic models employing sound waves appears to be widely accepted, but no experimental evidence is available to corroborate this. Experiments are described in which the acoustic behaviour of a space about  $14 \times 5 \times 3 \text{ m}^3$  in the octave about 200 c/s is compared with that of a model at one quarter scale, and it is shown that, for several of the well known objective acoustic tests, the theory that such models are possible is supported. The accuracy attained corresponds with the accuracy with which the surfaces were matched, and was considerably greater than that of the relation of objective testing and subjective impressions.

## Sommaire

On admet généralement qu'il est possible de réaliser avec des ondes sonores des maquettes acoustiques à trois dimensions, mais on n'en a pas encore fourni de démonstration expérimentale. On décrit ici des expériences dans lesquelles on a comparé les caractéristiques acoustiques d'une enceinte d'environ  $14 \times 5 \times 3 \text{ m}^3$ , dans l'octave englobant 200 Hz, avec celles d'une maquette à l'échelle 1 : 4; on montre qu'en ce qui concerne les essais acoustiques objectifs bien connus, il y a effectivement possibilité de réaliser de telles maquettes. La précision obtenue est celle suivant laquelle les surfaces sont appareillées, et est bien supérieure à celle atteinte par la comparaison des essais objectifs et des impressions subjectives.

## Zusammenfassung

Die Verwendbarkeit dreidimensionaler akustischer Modelle wird weitgehend anerkannt, ohne daß bisher eine experimentelle Bestätigung dafür vorliegt. Die Autoren vergleichen in ihren Experimenten das akustische Verhalten eines Raumes von  $14 \times 5 \times 3 \text{ m}^3$  in einem Oktavbereich um 200 Hz mit dem eines im Verhältnis 1 : 4 verkleinerten Raumes. Dabei ergibt sich, daß derartige Modelle für einige der üblichen objektiven akustischen Testmethoden verwendbar sind. Die erreichte Genauigkeit, die von der Genauigkeit der Oberflächenanpassung abhängt, war erheblich größer als die Übereinstimmung zwischen objektiven Tests und subjektiven Beurteilungen.

## 1. Introduction

Studies of the behaviour of models are often made by engineers to form an estimate of the likely behaviour of a new structure. After the foundation of the science of acoustics, ripple tanks and pulse photography techniques were used to estimate acoustical behaviour on a two dimensional basis. A three dimensional model and optical methods were successfully used in studying the behaviour of sound distribution in a theatre [1].

The possibility of a model employing sound waves was implicit in many early acoustical experiments, but does not seem to have been used until SPANDÖCK reported it in 1934 [2]. Since then various other workers, PEDERSEN [3], ORMESTAD [4], CANAC [5], BOLT and ROOP [6], HARDY and TYZZER [7], and KORN and KIRSCHNER [8] have reported the use of acoustic waves in models.

It has been shown [9] that if two spaces with the same bounding shape but with dimensions

in the ratio  $m$  to 1 are lined over corresponding areas with materials whose acoustic impedances at frequencies  $f$  and  $mf$  are equal, then the acoustic behaviour of the two spaces at these frequencies will be simply related, the ratios of the various responses depending only on  $m$ . As far as is known to the authors, previous workers have not reported any experiments which support the above theory of acoustic models and, in fact, most experimenters have been satisfied to use surface materials which bear only a superficial resemblance to those of the space they are modelling.

The experiments to be described were intended to check this theory before applying it to models of halls with the attendant difficulties of access, numerous surface types and the inability to modify the acoustic conditions. The space chosen was a room in the laboratory grounds, its shape being essentially a rectangular parallelepiped measuring  $13.6 \times 5.0 \times 3.2 \text{ m}^3$  (Fig. 1). A room of this shape may appear, at first sight, to be the simplest possible case, but it is probably one of the most difficult for acoustical purposes because less scattering and more standing waves would

\* The work described in this paper was carried out as part of the programme of the Division of Building Research, C.S.I.R.O., Melbourne, Australia.

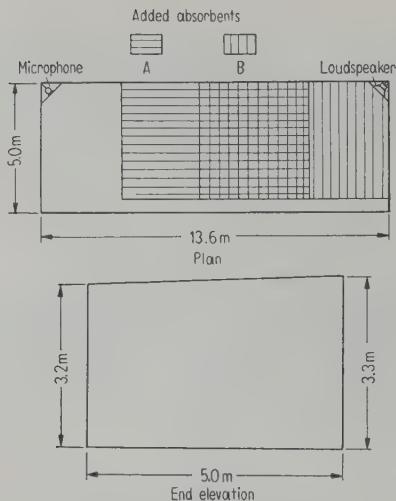


Fig. 1. Plan and elevation of room.

be expected than in more complex shapes. It was decided to make a 1/4 scale model of the room, as equipment was available for impedance comparisons at this frequency ratio.

Design of the model so that the bounding surfaces will be acoustically similar to those of the room can only be done by measuring the impedances of the room surfaces and of a number of selected materials from which the most suitable can be chosen. To avoid having to produce absorbents satisfactory over a wide range of frequencies, both the impedance matching and the experimental work were concentrated on the octave centered at 200 c/s. Since the principles and matching techniques are no different for one or several octaves, it was decided to concentrate on a reduced frequency range until some correlation between a room and model had been established. Obviously it would be better to cover more than one octave but the selection of suitable model surfaces is more time consuming. The octave chosen is likely to be one of the most difficult, since standing wave phenomena are accentuated in this frequency range in a room of the size and simple shape adopted. Some experimental results were obtained outside this range (particularly towards the lower side), but unintentional panel absorption in the room was not matched in the model.

There is some difficulty in selecting the measurements to be undertaken in studying the model behaviour. No single property can be chosen, since none can assure identical acoustical behaviour or adequate correlation with subjective results, and consequently a selection of the most likely has been made. All the widely known

measurements have been used ranging from the reverberation time, which may be claimed to give a broad average of much of the detailed response, to the transmission characteristic curves which appear to have far more detail than the ear would appreciate.

Only one combination of loudspeaker and microphone positions has been studied; both were placed near corners, where all standing waves have maxima. In any case, a change of position or of frequency produce comparable effects, and a study of both would appear unnecessary. No attempt was made to measure pressures in a steady state condition as small changes in temperature, oscillator frequency or slight movement of bounding surfaces will change the pressure pattern in an uncontrollable fashion during the long period required for such measurements.

## 2. Experimental considerations

The room has floor dimensions of  $13.6 \times 5.0 \text{ m}^2$  and has a flat sloped roof rising from 3.2 m to 3.3 m along the shorter side. The volume of the room is  $188.0 \text{ m}^3$ . The walls are constructed of plaster board 1 cm thick fixed to vertical wooden studs at 0.45 m centres, and are broken with a number of doors and windows. The floor is made in two sections approximately equal in area, one of wood and the other of suspended concrete. The ceiling is unbroken, and made of plaster board fixed to  $5 \times 2.5 \text{ cm}^2$  battens under wooden ceiling joists 0.45 m apart. For the purposes of this set of experiments the windows were covered with plaster board panels and the doors were closed when any measurements were being carried out.

There is little acoustic absorption (apart from some unintentional panel absorption at low frequencies) and the characteristics of the room were varied by using two sets of twenty panels, each panel  $1.8 \times 0.9 \text{ m}^2$ . These were portable and could be placed where desired; one set was arranged to have greater absorption than the other. Some control over the acoustic conditions in the room could then be exercised by using the bare room or the room with one or other set of the absorbent panels. Quarter scale panels were used in the model.

The acoustic impedances of the various surfaces in the room were measured by the transmission characteristic method, using a portable, metal lined, wooden chamber that could be placed against the surface to be measured, and then against a smooth metal surface. The method of measurement has been described previously [10].

Table I  
Comparison of impedances of room and model surfaces

Surface	Room (200 c/s)				Model (800 c/s)			
	Material	Specific acoustic impedance		Normal absorption coefficient	Material	Specific acoustic impedance		Normal absorption coefficient
		$ \zeta $	$-\varphi$			$ \zeta $	$-\varphi$	
Concrete floor	Concrete	85	60	0.049	Hard fibreboard (face)	36	80	0.037
Wood floor	Wood	80	45	0.072	Hard fibreboard (back)	32	70	0.088
Door	Wood	37	70	0.078	Hard fibreboard (back)	32	70	0.088
Wall	Plaster board	50	40	0.12	Perforated fibreboard	32	60	0.10
Ceiling	Plaster board	28	60	0.14	Perforated fibreboard	32	60	0.10
Panels A	Faced, mineral wool	9.3	36	0.38	Softboard	9.2	40	0.37
Panels B	Faced, mineral wool	6.4	14	0.63	Perforated softboard	6.6	13	0.61

The advantage of this method is that the surfaces already erected can be measured, and by measuring the impedance of a relatively large area, the effects of artificial mounting conditions of a sample are reduced. The impedances of the surfaces were measured at approximately 200 c/s. At this frequency the portable chamber used in the method covered an area of sample of  $0.84 \times 0.69 \text{ m}^2$ . The same chamber was used to measure the impedances of each set of panels.

The model shown in Fig. 2 was made one quarter scale, and its internal dimensions were correct to 0.5 per cent. The model was constructed with an external wooden frame and rigid internal walls lined with suitable surfaces matched to the corresponding model frequency of approx. 800 c/s.

Table I summarises the specific acoustic impedances  $|\zeta| e^{-i\varphi}$  ( $\varphi$  in degrees) and the normal

absorption coefficient for the various surfaces of the room and model.

The variability between the 20 panels of a particular designation can be judged from the values of a typical set, the room panels A. These are given in Table II in order of descending values of the modulus of the impedance.

Table II  
Specific acoustic impedance of panels A

$ \zeta $	$\varphi$	$ \zeta $	$\varphi$	$\zeta$	$\varphi$	$ \zeta $	$\varphi$
11.8	-33	9.4	-36	9.1	30	8.3	27
9.8	-41	9.4	-43	9.1	-38	8.1	-35
9.7	-37	9.3	-31	8.7	-38	8.0	38
9.7	-40	9.3	-32	8.5	-30	8.0	44
9.5	-41	9.3	-33	8.4	-37	7.9	-36

As a check on the portable panels for the room and the model, an absorption coefficient (calculated from the simple Sabine formula) was measured from the decay of sound when some of the panels were placed in a hardwalled chamber. The panels for the room were measured in a room having a volume of  $23 \text{ m}^3$ , for a frequency range 100 to 400 c/s, and the panels for the model were measured in a room of the same shape with one quarter the linear dimensions, using a frequency range four times that used for the larger room. Table III shows the results.

Table III  
Comparison of absorption coefficients in rectangular rooms

Room 1	Room 2
Panel A: 0.28	Panel A': 0.35
Panel B: 0.62	Panel B': 0.69



Fig. 2. Model with ceiling raised.

From the results of a recent study [11] an estimate can be made of the correlation to be expected between room and model on the basis of the accuracy of matching the bounding impedances. For the room without added absorbent, the maximum difference in the parameter<sup>1</sup>  $\alpha$  is about 30 per cent (for the ceiling), and when this parameter is multiplied by the corresponding surface areas there is a difference of 16 per cent between room and model. It would be expected, therefore, that the reverberation time estimated from the model would exceed that in the bare room by about 16 per cent. The values for the parameter for the panels differ by only 3 to 4 per cent and it would be expected that when all of the type B panels are used the reverberation time estimated from the model would exceed that of the room by about 10 per cent. Differences in pressures of the standing waves as developed in the model can be expected to cause discrepancies wherever the sound level is about 6 dB below the maximum in the bare model, or 8 dB in the model with added absorbent. The maximum change in the parameter  $\beta$  between room and model is equivalent [11] to a change in linear dimension of about 0.3 per cent, and since this is less than the tolerance achieved (0.5 per cent) the matching of phase angle is quite satisfactory.

### 3. Procedure

Sound was fed to the experimental room through a 30 cm diameter loudspeaker fixed on a baffle 92 cm square, which was mounted vertically across one corner of the room at an angle of 45° to each wall; a similar speaker and baffle was placed across another corner of the room and used as a microphone. Speakers 7.5 cm diameter on baffles 23 cm square were mounted in corresponding corners in the model, the free field response of each speaker-microphone combination having been determined from measurements made in the open air.

Measurements of several acoustic phenomena were made in the following way:

#### a) Reverberation measurements

White noise was passed through an octave filter to an amplifier and then to the speaker. The microphone output was amplified through a selective amplifier (Brüel and Kjær type No. 2105) and then fed to a graphic level recorder (Brüel

<sup>1</sup> The parameters  $\alpha$  and  $\beta$  are related to the wall impedance by the relation

$$\zeta \cos \Phi = \tanh [\pi(\alpha - i\beta)],$$

where  $\Phi$  is the angle of incidence of the sound.

& Kjær type No. 2304). The resulting decay of sound level when the speaker was shut off was drawn as a curve on the level recorder. Several measurements of decay were made, these being superimposed to give a mean value. Reverberation times were measured from the decays. The writing speed and the chart speed were increased by a factor of 5 and 3 respectively when decays in the model were to be measured; it was not possible for these quantities to be increased directly by a factor of 4.

#### b) Form of reverberation decay curve

The actual form of the reverberation decay curve is perhaps a more critical indication of the acoustic conditions existing in an enclosure, and the similarity of the decay form in the room for a given frequency and the form of decay for the model at four times this frequency was studied.

#### c) Transmission characteristic curves

Curves were recorded over the range 100 to 300 c/s for the room, and 400 to 1200 c/s for the model, using the level recorder. The average time to cover this range of frequencies was 10 minutes, which would appear to be slow enough to give an accurate record of the irregularities [6]. Frequencies were marked at 25 c/s intervals for the room and 100 c/s for the model.

A smoothed transmission characteristic curve was calculated by taking an average of the sum of the crest and trough values for each 25 c/s interval of the room curve, and then calculating the mean value of four such intervals to give values centred at 150, 175, 200, 225 and 250 c/s. An equivalent curve was calculated for the model using the 100 c/s intervals and giving values centred at 600, 700, 800, 900 and 1000 c/s.

An independent measurement of such a curve was made, for one set of conditions, using a white noise source and passing the output from the microphone through a tuned amplifier to determine the average response at a number of different frequencies.

The curves obtained by a smoothing process give an indication of the effect due to the introduction of absorbent material, this effect being related to the absorption coefficient of the material.

#### d) Frequency irregularity curves

Curves were prepared, following the procedure given by Bolt and Roop [6] where the frequency irregularity in any interval is obtained by dividing the width of the frequency interval into the difference between the sum of the peak values and the sum of the trough values. Such curves

can be calculated from the transmission characteristic curves obtained as in section c above. The frequency irregularity was determined for each 25 c/s interval in the case of the room (100 c/s interval in the model) and the mean value obtained by averaging the values of four consecutive intervals. Thus over the range 100 to 300 c/s for the room, values can be obtained centred at 150, 175, 200, 225 and 250 c/s. The equivalent frequencies for the model are 600, 700, 800, 900 and 1000 c/s. The smoothed curves so produced enable comparison of the behaviour of the room and of the model.

#### e) Pulse measurements

Measurements were made at several frequencies with pulses of sound, the pulse received by the microphone being recorded photographically. Pulse lengths of 16 ms at a rate of one per second, and 4 ms at a rate of four per second, were selected for the room and the model respectively. Each picture recorded four consecutive pulses. The sine wave frequency chosen to be pulsed was that of suitable peaks selected from the transmission characteristic curve close to 150, 200 and 250 c/s in the room and that of corresponding peaks close to 600, 800 and 1000 c/s in the model.

### 4. Results

The most suitable manner in which to present the results obtained in the different tests is by a graphical comparison of the behaviour of the room and the model. As the model measurements were made at four times the frequency used for the room a common basis for comparing the results may be obtained by dividing the frequency scale of the model tests by four. The scale factor for the magnitude of a particular property measured in any one test is known, and a direct comparison between model and room for that property can be shown on one graph. Scales along the axes of each figure relate to the room directly, and to the model after the necessary correction for the scale factor has been applied.

#### a) Reverberation time

Fig. 3 shows the comparison between room and model for two different conditions; Fig. 3a for the room without any added absorbent and Fig. 3b for the room with 20 panels of added absorbent B. This absorbent was added in a single area  $4.6 \times 7.3 \text{ m}^2$  in one corner of the room, as shown in the plan in Fig. 1.

The behaviour of the room is much closer to that of model when absorbent is added to the

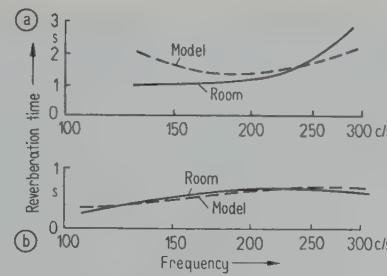


Fig. 3. Reverberation times. (Frequencies and reverberation times in model changed to equivalent room values.)  
(a) Room bare, (b) Added absorbent B.

room. This is due to unintentional low frequency panel absorption in the doors, and possibly the covered windows of the room. This is not duplicated in the model, where doors and windows are rigid surfaces. The effect of this absorption is greatly reduced when absorbent is added to the room. In each case the agreement is reasonable in the range of frequencies from 200 to 250 c/s, as it was in this range that the acoustic properties of the model surfaces were chosen to match those of the room.

#### b) Form of reverberation decay

The form of reverberation decay was studied for the standing wave pattern existing when the room was excited with the frequency of one of many resonant peaks. The fluctuations in the pattern when a white noise source is used are so complex that it is better to compare the decay resulting from the use of a simple source. By selecting the correctly matched peak in the model, the decay form of a simpler standing wave system can be compared with that in the room. The decay form should be similar, but four times faster, in the model. Three examples of such decay are shown in Fig. 4. The general similarity is apparent, especially during the first 10 to 15 dB.

#### c) Transmission characteristic curves

Transmission characteristic curves taken in the room and the model are shown in Fig. 5. The

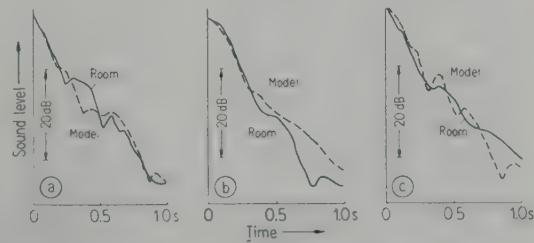


Fig. 4. Reverberation decay patterns. (Frequencies and times in model changed to equivalent room values.)  
(a)  $f \approx 180 \text{ c/s}$ , (b)  $f \approx 200 \text{ c/s}$ , (c)  $f \approx 240 \text{ c/s}$

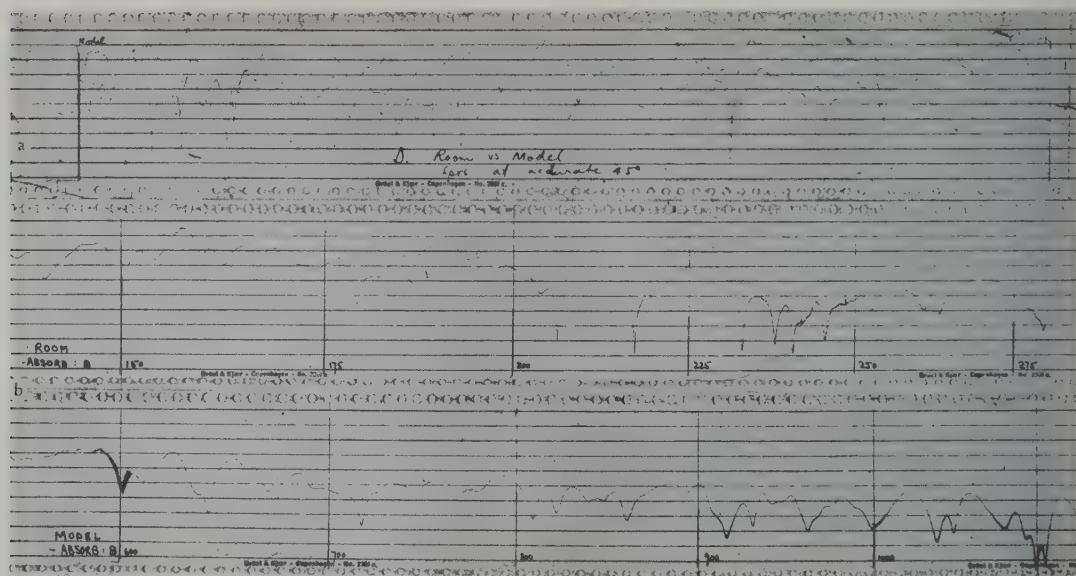


Fig. 5. Transmission characteristic curves. Room frequency range approximately 150 to 280 c/s (50 dB potentiometer); (a) Room and model bare, (b) Room and model with added absorbent B.

general similarity is fairly obvious, but there is no exact agreement between the magnitudes and positions of troughs and peaks at any stage. It was found, however, that the curve for the room changed quite considerably from day to day. The peaks and troughs occurred at higher frequencies as the temperature increased, the proportional frequency change being about equal to the temperature coefficient of the velocity of sound. The relative magnitudes also changed (see section f below). The model was located in a room in which temperature did not change rapidly, and day to day variations were relatively slight, as would be expected.

Fig. 6 gives the response curves smoothed in the manner described previously. Fig. 6a refers to the bare room; Fig. 6b refers to the room with added absorbent A; and Fig. 6c refers to the room with added absorbent B. Fig. 6d was obtained by the method described earlier, using absorbent B and the

white noise source. The similarity between this figure and Fig. 6c shows that the method of smoothing was reasonable. Correlation between the room and model curves is good.

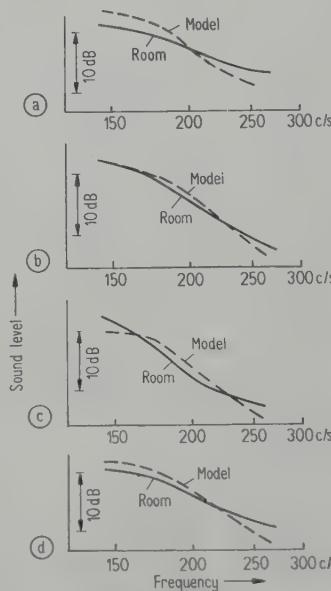


Fig. 6. Response curves. (Frequencies in model changed to equivalent room values.) (a) Bare room, (b) Added absorbent A, (c) Added absorbent B, (d) Added absorbent B, white noise source.

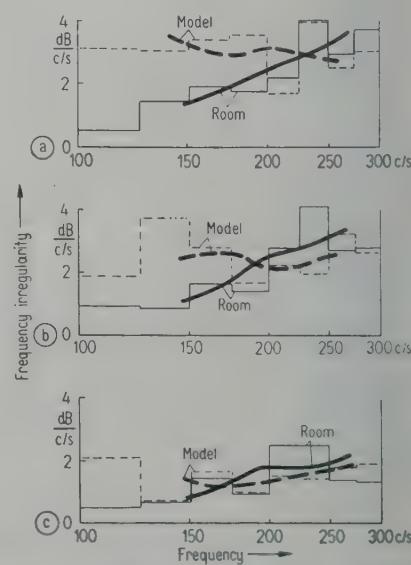


Fig. 7. Frequency irregularities. (Frequencies and frequency irregularities in model changed to equivalent room values.) (a) Bare room, (b) Added absorbent A, (c) Added absorbent B.

## d) Frequency irregularity curves

The results obtained from the calculation of the frequency irregularity of the transmission characteristic curves are shown in Fig. 7. This shows the frequency irregularity for intervals of 25 c/s for frequencies from 100...300 c/s in the room, with the irregularity calculated for the model for the equivalent frequency interval and range. The heavy curves are for values smoothed by averaging the results from four consecutive 25 c/s intervals and are a more satisfactory basis on which to compare the behaviour of the room and its model. The frequency shifts in the transmission characteristic curves of the room due to temperature changes have considerably less influence when a 100 c/s interval is taken rather than a 25 c/s interval.

Several comments may be made about these curves. The effect of the unintentional absorption existing in the bare room at low frequencies is shown by the small frequency irregularity at low frequencies. As would be expected this effect is smaller with absorbent added to the room, when the frequency irregularity in both room and model is reduced and the smoothed curves then

become closer to each other. It can be seen, however, that curves for the room and the model have a common value somewhere in the frequency range 150 to 250 c/s, where matching of the room and model surfaces was attempted.

Day to day variations in the transmission characteristic curve of frequency and amplitude (see section f below) make it impossible to obtain identical frequency irregularity curves for room and model. This suggests that undue importance should not be given to the actual magnitude of the frequency irregularity in any one 25 c/s interval, and that averaging over 100 c/s interval will only give an indication of the behaviour of an arbitrarily defined quantity—the frequency irregularity.

## e) Pulse pictures

Pictures of pulses of sound obtained using frequencies selected from suitable peaks in the transmission characteristic curves of the room and the equivalent peaks in the model are shown in Fig. 8. The room and model pictures are not directly comparable as the time scales are not linear. The similarity of the pulse form is clearly seen, and prominent features of the room pulse may be observed in the model pulse.

## f) Day to day variations

Day to day changes were noticed in the shape of the reverberation decays, the transmission characteristic curves and the frequency irregularity. The effect is perhaps best illustrated from the frequency irregularity which is shown in Table IV for the bare room, measured under different conditions. Two measurements made at the same temperature on one day are given to show the reproducibility that can be obtained. Three others show the variation encountered on other days.

Table IV  
Day to day variation of frequency irregularity  
(dB/c/s over 100 c/s intervals)

Date	Temp.	150 c/s	175 c/s	200 c/s	225 c/s	250 c/s
* 27. 1. 54	21 °C	1.43	1.76	2.49	2.71	3.61
* 27. 1. 54	21 °C	1.43	1.74	2.50	2.66	3.58
26. 1. 54	34.5 °C	1.34	1.74	2.30	2.50	3.01
27. 1. 54	29 °C	1.23	1.73	2.31	2.75	3.29
29. 1. 54	14 °C	1.39	1.80	2.52	2.69	3.37

\* Indicates reproducibility in successive tests.

## 5. Discussion

With the exception of the reverberation time, it is not possible to assess the maximum errors to

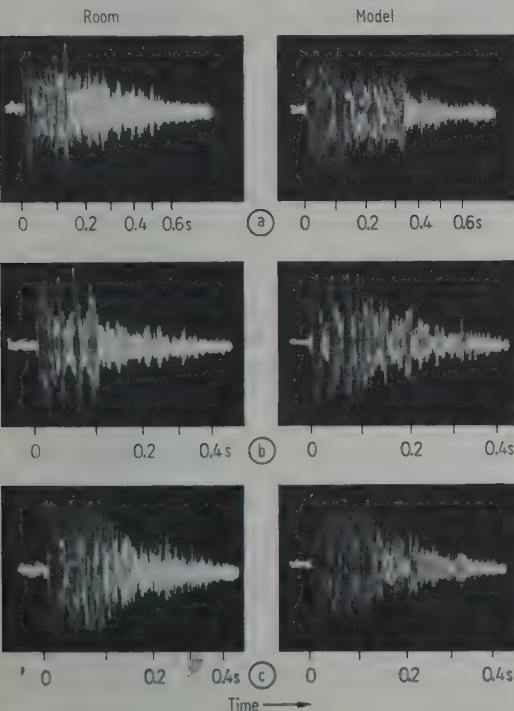


Fig. 8. Pulse photographs. (Times and frequencies in model changed to equivalent room values.)  
(a) Room and model bare, 250 c/s,  
(b) Room and model with added absorbent B,  
200 c/s,  
(c) Room and model with added absorbent B,  
250 c/s.

be expected or tolerated in the correlation of the response of room and model. The correlation of the two reverberation times is comparable with the accuracy of matching of the absorption coefficients (compare Table I and Fig. 3). In this the results from the model probably achieve an accuracy exceeding that expected from any of the well known formulae. The shape of the decay curve is closely related to this criterion and again the correlation is good, the difference being comparable with that found between decay curves from the room on successive days. It is generally agreed that the way in which the sound decays during the first 15 dB or so is more important than the way it decays after this (a conclusion which is in agreement with results obtained subjectively by various experimenters) and agreement is best in this range. The use of pulse methods is a practical recognition of the same idea.

The transmission characteristic curves show the greatest discrepancies between the two acoustic responses but they give unnecessary detail without corresponding subjective interpretation. However, discrepancies of the same order were found in the room when minor physical changes (e. g. change of temperature) were introduced. It should be noted further that the differences are generally connected with troughs in the response and that for the surface matching used correlation cannot be expected beyond 6 dB down in the bare model and 8 dB down in the model with absorbent. If the transmission curve be smoothed to give the frequency irregularity [6] or the average response as used here, the differences are less marked and probably not important when it is considered that the subjective effects of any changes in these measurements are far from clear.

The pulse pictures obtained (of which only samples are given in Fig. 8) also show that the prominent features of the room response are duplicated in the model with sufficient accuracy that subjective ratings would not be upset by the differences.

It cannot be reasonably suggested that the experiments for one shape and one scale ratio only demonstrate that acoustic models can be used in all circumstances. However, it seems that there is sufficient justification for proceeding to models of full size halls to check that adequate correlation can be achieved over a reasonable frequency range. The most that any further work can produce is confirmatory evidence of the model theory, leaving unsatisfied the outstanding need of room acoustics—an instrumental meas-

urement that can be correlated with the subjective assessment of a space.

If the response of an enclosure is required in great physical detail, it would be necessary to take extreme care to match impedances correctly over the frequency range of interest, to control temperature effects and to have microphones and loudspeakers that accurately duplicate the performance of their full size counterparts.

## 6. Conclusions

Experiments with a quarter scale acoustic model of a rectangular room over a frequency range of one octave (wavelength about one half smallest room dimension) show that for the more commonly accepted acoustical criteria the behaviour of the model and its full size original are similar. The accuracy of correlation corresponded closely with the accuracy of matching of the full size and model surfaces. The theory that a model will enable good estimates to be made of the acoustical response of a full sized hall is supported. Before any great advance is possible the major problem is to determine what physical measurements adequately correlate with subjective impressions of the acoustics of a hall.

(Received October 21st, 1955.)

## References

- [1] VERMEULEN, R. and DE BOER, J., Optical model experiments for studying the acoustics of building. Philips techn. Rev. **1** [1936], 46-52.
- [2] SPANDÖCK, F., Akustische Modellversuche. Ann. Phys. **20** [1934], 345-360.
- [3] PEDERSEN, P. O., Lydtekniske undersøgelser. Ingenør-videnskabelige Skrifter [1940], Nr. 5.
- [4] ORMESTAD, H., Über die Verwendung räumlicher Modelle in der Raumakustik. Norske videnskabers selskabs Skrifter [1942], Nr. 1.
- [5] CANAC, F., On the acoustics of Grecian and Roman theatres. J. roy. Inst. Brit. Archit. 3rd Series **56** [1949], 412-415.
- [6] BOLT, R. H. and ROOP, R. W., Frequency response fluctuations in rooms. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 280-289.
- [7] HARDY, H. C. and TYZZER, F. G., Techniques for determining acoustics of amphitheatres by scale model studies with high frequency sounds. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 679.
- [8] KORN, T. and KIRSCHNER, F. G., L'analyse des phénomènes acoustiques transitoires sur les modèles réduits. Ann. Télécommun. **7** [1952], 414-420.
- [9] MUNCEY, R. W., The use of three dimensional models in room acoustics. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 510-511.
- [10] NICKSON, A. F. B. and MUNCEY, R. W., Acoustic impedance measurement by the transmission characteristic method. Acustica **3** [1953], 192-198.
- [11] NICKSON, A. F. B. and MUNCEY, R. W., Accuracy of matching for bounding surfaces of acoustic models. Acustica **6** [1956], 35-39.

# DIE VIERPOLERSATZSCHALTBILDER DER ELEKTROMECHANISCHEN WANDLER

Teil II

von A. LENK

Mitteilung aus dem Institut für Elektro- und Bauakustik der Technischen Hochschule Dresden

## Zusammenfassung

Für die piezoelektrischen und magnetostriktiven Wandler werden, ausgehend von den statischen Grundgleichungen, verschiedene Ersatzschaltbilder abgeleitet und ihre Zusammenhänge untereinander angegeben. Sämtliche Wandlergruppen werden unter Berücksichtigung ihrer physikalischen Eigenschaften und ihrer Ersatzschaltbilder miteinander verglichen, mit dem Ziel, eine systematische Zusammenstellung zu erhalten.

## Summary

For piezo-electric and magneto-strictive transducers, different equivalent circuits are proposed, depending on the static fundamental equations, and their inter-relation set out. Complete groups of transducers are systematically correlated having regard to their physical properties and equivalent circuits.

## Sommaire

On établit différents schémas équivalents aux transducteurs piézoélectriques et à magnéto-striction, en se basant sur leurs équations statiques fondamentales, et on indique les relations existant entre ces schémas. On compare entre eux les différents groupes de transducteurs en égard à leurs caractéristiques physiques et à la nature de leurs schémas équivalents, en vue d'établir un classement systématique.

## Einleitung

In der deutschen Literatur werden die piezoelektrischen Wandler bisher im wesentlichen als elektrische Zweipole betrachtet. Die elektrische Rückwirkung einer mechanischen Belastung ist nicht zu übersehen. Bei F. A. FISCHER [1] und W. REICHARDT [2] werden Vierpolersatzschaltbilder angegeben, die jedoch im mechanischen Teil größere Vernachlässigungen enthalten. Es werden keine Unterschiede zwischen Längs- und Dickenschwingern gemacht.

Exakte Ersatzschaltbilder sowohl für den piezoelektrischen als auch für den magnetostriktiven Wandler sind bei W. P. MASON [3] angegeben. Es zeigt sich jedoch, daß ebenso wie bei den Wändlern mit konzentrierten mechanischen Elementen (Teil I, *Acustica* 5 [1955], 1–6) für jeden Wandler zwei Ersatzschaltbilder existieren, deren Zusammenhang nicht unmittelbar ersichtlich ist. Im magnetischen Fall wird sowohl die eine als auch die andere Möglichkeit verwendet [4], [5]. Im folgenden werden zunächst die statischen Verkopplungsgleichungen zwischen elektrischen (magnetischen) und mechanischen Größen in möglichst enger Analogie zur Vierpoltheorie aufgestellt [6]. Daraus lassen sich leicht die Beziehungen zwischen den einzelnen Verkopplungskonstanten, den dielektrischen und

elastischen Konstanten ablesen [7]. Mit Hilfe dieser Beziehungen werden dann die möglichen Ersatzschaltbilder für jeden Wandler aufgestellt und in eine mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen zweckmäßige Form gebracht.

## 1. Piezoelektrische Wandler

### 1.1. Statische Verkopplungsgleichungen

Der Dehnungstensor  $S$  und der Spannungstensor  $T$  sind mit den beiden elektrischen Vektoren  $E$  und  $D$  so verknüpft<sup>1</sup>, daß wie bei einem elektrischen Vierpol zwei der insgesamt vier beteiligten Größen die beiden anderen vollständig festlegen [7]. Man kann ähnlich wie in der elektrischen Vierpoltheorie vier Formen von Verkopplungsgleichungen anschreiben, die hier je vier piezoelektrische, mechanische und dielektrische Konstanten definieren. Sie sind von der Form:

$$D_n = F_n(S_i, E_m), \quad T_j = \Phi_j(S_i, E_m), \quad (1)$$

$$D_n = g_n(T_j, E_m), \quad S_i = \gamma_i(T_j, E_m), \quad (2)$$

$$S_i = f_i(D_n, T_j), \quad E_m = \varphi_m(D_n, T_j), \quad (3)$$

$$T_j = G_j(D_n, S_i), \quad E_m = \Gamma_m(D_n, S_i), \quad (4)$$

$$n, m = 1, \dots, 3, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

<sup>1</sup> Eine Zusammenstellung der Bezeichnungen findet sich am Schluß der Arbeit.

Die Gleichungen lassen sich als vollständige Differentiale schreiben. Gleichzeitig führt man zweckmäßig komplexe Größen ein ( $\Delta S = \operatorname{Re}(S e^{j(\omega t + \varphi_S)}) = \operatorname{Re}(S \cdot e^{j\omega t})$ ).

Mit den bei MASON [7] abgeleiteten Beziehungen zwischen den beiden piezoelektrischen Verkopplungskonstanten in jedem Gleichungssystem ergeben sich schließlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} D_n &= e_{ni} S_i + \varepsilon_{nm}^S E_m, \\ T_j &= -c_{ji}^E S_i + e_{mj} E_m; \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} D_m &= -d_{mj} T_j + \varepsilon_{mn}^T E_n, \\ S_i &= -s_{ji}^E T_j + d_{mi} E_m; \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} S_i &= g_{ni} D_n - s_{ij}^D T_j, \\ E_m &= \beta_{mn}^T D_n + g_{mj} T_j; \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} T_j &= h_{mj} D_m - c_{ji}^D S_i, \\ E_m &= \beta_{nm}^S D_n - h_{mi} S_i. \end{aligned} \quad (4a)$$

$$i, j = 1, \dots, 6, \quad m, n = 1, \dots, 3.$$

Wie in der elektrischen Vierpoltheorie genügt natürlich eines der Gleichungssysteme (1a) bis (4a) zur vollständigen Beschreibung der piezoelektrischen Verkopplung. Die vier Systeme sind nur vier verschiedene Formen der Beschreibung eines bestimmten Zusammenhangs und sie lassen sich demgemäß auch ineinander überführen. Daraus ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen den Piezokonstanten [7]:

$$\begin{aligned} e_{ni} &= \varepsilon_{nm}^S h_{mi} = d_{nj} c_{ij}^E, \\ d_{ni} &= \varepsilon_{nm}^T g_{mi} = e_{nj} s_{ij}^E, \\ g_{ni} &= \beta_{nm}^T d_{mi} = h_{nj} s_{ij}^D, \\ h_{ni} &= \beta_{nm}^S e_{mi} = g_{nj} c_{ij}^D. \end{aligned}$$

Die Umwandlung der einzelnen Systeme gelingt einfach, wenn man beachtet, daß zwischen den  $c_{ij}$  und  $s_{ij}$  sowie zwischen den  $\varepsilon_{nm}$  und  $\beta_{nm}$  die folgenden Zusammenhänge bestehen:

$$s_{ij} c_{je} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } e = i \\ 0 & \text{wenn } e \neq i \end{cases} \quad e = 1, \dots, 6,$$

$$\beta_{nm} \varepsilon_{me} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } e = n \\ 0 & \text{wenn } e \neq n \end{cases} \quad e = 1, \dots, 3.$$

## 1.2. Vierpolgleichungen und Ersatzschaltbilder

In piezoelektrischen Wandlern finden in der Regel zwei Arten von Schwingern Anwendung. Bei höheren Frequenzen benutzt man meist kreisförmige piezoelektrische Scheiben, deren Durchmesser groß gegen die Dicke ist. Die Scheibe verändert dann bei einer elektrischen Anregung senkrecht zu den Scheibenoberflächen ihre Dicke. Diese Art von Schwingern wird als Dicken-

schwinger (Dickendehnungsschwinger) bezeichnet (Abb. 1a).

Bei tieferen Frequenzen läßt man meist rechteckige Stäbe, deren Länge groß gegen die Querabmessungen ist, in der Längsausdehnung schwingen. Die elektrische Anregung erfolgt dann senkrecht zur Stabachse. Diese Schwinger bezeichnet man als Längsschwinger (Abb. 1b).

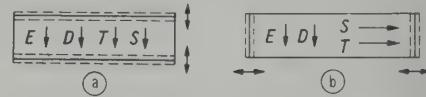


Abb. 1. (a) Dickenschwinger, (b) Längsschwinger.

### 1.2.1. Dickenschwinger

#### a) Verkopplungsgleichungen

Der einfachen mathematischen Behandlung ist nur der Grenzfall der unendlich ausgedehnten Platte zugänglich, weil dort nur die Randbedingungen an den beiden Plattenoberflächen beachtet zu werden brauchen. In isotropen Medien (Bariumtitanat) existiert nur eine Deformationskomponente parallel zur Plattennormale. Von den Einkristallen wird als Dickenschwinger im wesentlichen Quarz im X-Schnitt verwendet, in dem man durch ein zur  $x_1$ -Achse paralleles Feld eine reine Dickendehnungsschwingung erregen kann [8].

Es erhebt sich nun die Frage, welches der vier Gleichungssysteme (1a) bis (4a) zur Beschreibung eines Dickendehnungsschwingers mit der oben beschriebenen Anregungsart zweckmäßig zu verwenden ist. Da nur die Deformation  $S_1$  vorhanden ist, wird man ein Gleichungssystem wählen, in dem die Deformationen als unabhängige Veränderliche auftreten (elastische Konstante  $c_{ij}$ ). Wenn nur die beiden Plattenoberflächen senkrecht zur Schwingungsrichtung Elektroden tragen, kann nur eine Komponente der elektrischen Feldstärke auftreten, nämlich  $E_1$ , wohingegen elektrische Verschiebungen auch in den anderen Richtungen auftreten können, wenn die entsprechenden piezoelektrischen Verkopplungskonstanten vorhanden sind. Als zweite unabhängige Veränderliche muß also die elektrische Feldstärke gewählt werden. Das bedeutet, daß hier das Gleichungssystem (1a) zu verwenden ist, und zwar in der folgenden Form, wenn man die  $x_1$ -Achse mit der Schwingungsrichtung zusammenfallen läßt:

$$\begin{aligned} D_1 &= e_{11} S_1 + \varepsilon_{11}^S E_1, \\ T_1 &= -c_{11}^E S_1 + e_{11} E_1. \end{aligned} \quad (1b)$$

Um sämtliche Eigenschaften des Dickenschwingers bequem ablesen zu können, ist es zweck-

mäßig, das Gleichungssystem (1b) nach der von der Vierpoltheorie her bekannten Methode so umzuformen, daß die Gleichungssysteme (2b) bis (4b) entstehen:

$$\mathbf{D}_1 = -\frac{e_{11}}{c_{11}^E} \mathbf{T}_1 + \frac{\varepsilon_{11}^S}{1-k^2} \mathbf{E}_1, \quad (2b)$$

$$\mathbf{S}_1 = -\frac{1}{c_{11}^E} \mathbf{T}_1 + \frac{e_{11}}{c_{11}^E} \mathbf{E}_1;$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{k^2}{e_{11}} \mathbf{D}_1 - \frac{1}{c_{11}^E} (1-k^2) \mathbf{T}_1, \quad (3b)$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} (1-k^2) \mathbf{D}_1 + \frac{k^2}{e_{11}} \mathbf{T}_1;$$

$$\mathbf{T}_1 = \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D}_1 - \frac{c_{11}^E}{1-k^2} \mathbf{S}_1, \quad (4b)$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D}_1 - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{S}_1;$$

$$c_{11}^{D'} = \frac{c_{11}^E}{1-k^2},$$

$$\varepsilon_{11}^{T'} = \frac{\varepsilon_{11}^S}{1-k^2}.$$

Darin ist

$$k^2 = \frac{e_{11}^2}{c_{11}^E \varepsilon_{11}^T} = \frac{1}{1 + (c_{11}^E \varepsilon_{11}^S / e_{11}^2)} = \frac{e_{11}^2}{\varepsilon_{11}^S c_{11}^{D'}}$$

der elektromechanische Kopplungsgrad für diese Schwingungsart. Der Strich bei  $c_{11}^{D'}$  und  $\varepsilon_{11}^{T'}$  soll daran erinnern, daß diese Größen nur in Sonderfällen mit  $c_{11}^D$  und  $\varepsilon_{11}^T$  identisch sind.

Die Bedeutung dieses Kopplungsgrades erkennt man aus der folgenden Überlegung. Legt man an den betrachteten Dickenschwinger eine elektrische Spannung, so entsteht infolge der Kraftwirkung auf die Molekulardipole eine Polarisierung, die man bei piezoelektrischen Körpern aufteilen kann in einen solchen Anteil  $P_1'$ , der auch vorhanden ist, wenn man den Körper an der Deformation hindert, d. h. festklemmt, und in einen zweiten Anteil  $P_1''$ , der immer mit einer Deformation verbunden ist. Läßt man den Körper mechanisch leerlaufen, so wird er nach Erzeugung einer bestimmten Feldstärke  $E_1$  eine um  $V \cdot E_1 P_1''/2 = \Delta U \cdot V$  größere Energie aufgenommen haben als im festgeklemmten Zustand, wenn  $V$  das Volumen des Körpers ist. Diesen Differenzbetrag kann man als die infolge der Deformation in mechanischer Form gespeicherte Energie ansehen. Beachtet man, daß im festgeklemmten Zustand  $U^S = E_1^2 \varepsilon_{11}^S / 2$  und im Leerlauf  $U^T = E_1^2 \varepsilon_{11}^T / 2$  aufgenommen wird, so findet

man für das Verhältnis von mechanischer Energie zu insgesamt zugeführter Energie

$$\frac{W_{\text{mech}}}{W_{\text{ges}}} = \frac{\varepsilon_{11}^{T'} - \varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{11}^{T'}} = 1 - \frac{\varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{11}^{T'}} = k^2.$$

Als eigentliche dielektrische Konstante, die der eines nicht piezoelektrischen Körpers entspricht, muß also die für konstante Deformation angesehen werden, da  $\varepsilon_{11}^{T'}$  noch die infolge der piezoelektrischen Rückwirkung zusätzlich auftretende Polarisierung  $P_1''$  enthält.

### b) Vierpolgleichungen

Da beim Dickenschwinger keine Verwechslungen vorkommen können, sollen die Indizes an den Größen  $E$ ,  $D$ ,  $T$  und  $S$  fortgelassen werden. Den Betrachtungen soll eine kreisförmige Scheibe mit der Dicke  $l$  und der Fläche  $A$  zugrunde gelegt werden (Abb. 2).

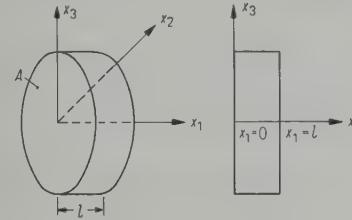


Abb. 2. Dickenschwinger.

Mit Einführung der Schnelle  $v = j\omega\xi$  und des spezifischen Mitganges  $H_n^D = j\omega l / c_{11}^{D'}$  werden aus den Gleichungen (4b) die Gleichungen

$$\mathbf{T} = \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D} - \frac{l}{H_n^D} \frac{d\mathbf{v}}{dx}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D} - \frac{e_{11}}{j\omega \varepsilon_{11}^S} \frac{d\mathbf{v}}{dx}.$$

Die in  $H_n^D$  enthaltene Länge  $l$  ist eine Größe, die vorläufig noch beliebig ist und später zweckmäßig mit der Dicke des Schwingers gleichgesetzt wird.

Um das dynamische Verhalten des Schwingers vollständig zu beschreiben, muß man den Einfluß der Masse berücksichtigen. Als Ausdeutung der ersten Gleichung von (5) kann man sich den Schwinger gemäß Abb. 3 längs der Koordinate  $x$  in einzelne Elemente, die Feder, Masse und eine Bewegungsquelle enthalten, zerlegt denken.

Die eingezeichneten Pfeile bedeuten Druckspannungen, die jeweils an der Schnittfläche wirken, auf die sie hinweisen. Das Kräftegleichgewicht am Punkt B ist identisch mit der ersten Gleichung von (5). Dabei ist zu beachten, daß wegen der Definition von  $\mathbf{T}$  als Druckspannung

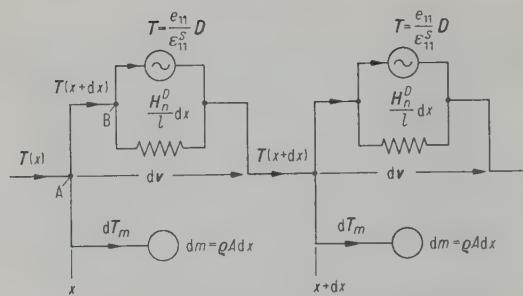


Abb. 3. Leitungsmodell eines Dickenschwingers.

und  $S = \frac{1}{j\omega} \frac{d\mathbf{v}}{dx}$  als Ausdehnung die auf die Feder wirkende Druckspannung  $\mathbf{T}_f = -\frac{l}{H_n^D} \frac{d\mathbf{v}}{dx}$  ist.

Das Kräftegleichgewicht am Punkt A liefert

$$\mathbf{T}(x) - \mathbf{T}(x+dx) = d\mathbf{T}_m = -d\mathbf{T}. \quad (6)$$

Daraus wird mit dem Newtonschen Gesetz unter Einführung von  $H_m = 1/j\omega\rho l = 1/j\omega M$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_m &= \frac{\rho A}{A} j\omega \mathbf{v} = j\omega \rho \mathbf{v} dx, \\ \frac{d\mathbf{T}}{dx} &= -j\omega \rho \mathbf{v} = -\frac{1}{H_m l} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6a)$$

Da im Innern des Schwingers keine Ladungen vorhanden sind ( $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ ), gilt hier nach Voraussetzung noch

$$d\mathbf{D}/dx = 0. \quad (7)$$

Mit der ersten Gleichung von (5) folgt daraus eine Differentialgleichung für  $\mathbf{v}$

$$\frac{d^2 \mathbf{v}}{dx^2} - \frac{H_n^D}{H_m} \frac{1}{l^2} \mathbf{v} = 0. \quad (8)$$

$\mathbf{T}$  kann man dann aus der ersten Gleichung von (5) berechnen. Als Randbedingung soll der praktisch stets vorhandene Fall eingeführt werden, daß der Schwinger auf der einen Seite  $x = 0$  leerläuft und auf der anderen Seite  $x = l$  eine Schnelle  $\mathbf{v}$  in ein angekoppeltes Medium sendet; d. h.

$$\mathbf{T}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(l) = \mathbf{v}_l. \quad (9)$$

Führt man zur Abkürzung die durch die Beziehungen (10) definierten Größen ein

$$\begin{aligned} \eta &= \omega \sqrt{MN^D} = \omega \sqrt{m n^D} = \omega/\omega_0, \\ Z^D &= \sqrt{N^D/M} = A \sqrt{n^D/m}, \\ n^D &= N^D/A = l/A c_{11}^D = \xi/F, \quad m = \rho A = M/A, \end{aligned} \quad (10)$$

so erhält man für

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l \frac{\cos \eta \frac{x}{l}}{\cos \eta} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D} Z^D \frac{j \sin \eta \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\cos \eta}, \quad (11)$$

$$\mathbf{T} = \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D} \left[ 1 - \frac{\cos \eta \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\cos \eta} \right] - j \frac{1}{Z^D} \frac{\sin \eta}{\cos \eta} \frac{x}{l} \mathbf{v}_l. \quad (12)$$

Setzt man in dem Ausdruck für  $\mathbf{T}$  (Gl. (12))  $x = l$ , so erhält man

$$\frac{j \sin \eta}{\cos \eta - 1} \frac{1}{Z^D} \mathbf{v}_l + \frac{\cos \eta}{\cos \eta - 1} \mathbf{T}_l = \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D}. \quad (13)$$

Die Gl. (13) ist bereits eine der gesuchten Vierpolgleichungen.

Mit den Größen

$$f_1(\eta) = \frac{j \sin \eta}{\cos \eta - 1}, \quad f_2(\eta) = \frac{\cos \eta}{\cos \eta - 1}, \quad (14)$$

$$z^D = Z^D/A, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T}A, \quad \mathbf{i} = j\omega \mathbf{D}A$$

erhält man schließlich aus Gl. (13)

$$\frac{e_{11}}{j\omega \varepsilon_{11}^S} \mathbf{i} = \mathbf{v}_l \frac{f_1}{z^D} + f_2 \mathbf{F}_l. \quad (15)$$

Die andere Vierpolgleichung erhält man aus der zweiten Gleichung von (5) durch Integration längs  $x$  zu

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \int_0^l \mathbf{E} dx = \int_0^l \left( \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D} - \frac{e_{11}}{j\omega \varepsilon_{11}^S} \frac{d\mathbf{v}}{dx} \right) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} l \mathbf{D} - \frac{e_{11}}{j\omega \varepsilon_{11}^S} [\mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Setzt man in Gl. (11)  $x = 0$ , so erhält man

$$\mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_l \left( 1 - \frac{1}{\cos \eta} \right) + \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^S} \mathbf{D} Z^D j \tan \eta. \quad (17)$$

Ersetzt man  $\mathbf{D}$  in Gl. (17) mit Hilfe von Gl. (13) durch  $\mathbf{v}_l$  und  $\mathbf{T}_l$ , so ergibt sich mit Gl. (16) und der durch  $\varepsilon_{11}^S A/l = C^S$  neu eingeführten Kapazität

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} \frac{\omega C^S}{e_{11} A/l} \left( \mathbf{u} - \frac{1}{j\omega} \frac{l}{\varepsilon_{11}^S A} \mathbf{i} \right) \\ = 2 \mathbf{v}_l + \frac{j \sin \eta}{\cos \eta - 1} z^D \mathbf{F}_l = \mathbf{v}_{el}. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Gl. (18) ist die gesuchte zweite Vierpolgleichung. Verschiebung und mechanische Spannung sind dabei noch nach Gl. (14) durch Strom und Kraft ausgedrückt worden.

Zusammenfassend kann man also das System der Vierpolgleichungen anschreiben:

$$\frac{1}{j} \frac{\omega C^S}{e_{11} A/l} \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{i}}{j\omega C^S} \right) = 2 \mathbf{v}_l + z^D f_1 \mathbf{F}_l = \mathbf{v}_{el}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{j} \frac{e_{11} A}{l} \frac{1}{\omega C^S} \mathbf{i} = \frac{f_1}{z^D} \mathbf{v}_l + f_2 \mathbf{F}_l = \mathbf{F}_{el}.$$

Daraus liest man das Ersatzschaltbild der Abb. 4 ab.

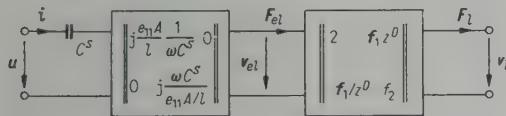


Abb. 4. Erstes Ersatzschaltbild des Dickenschwingers.

Wie bei der Behandlung der Wandler im Teil I dieser Arbeit kann man den imaginären Transformator mit der Reihenschaltung von  $C^S$  in einen reellen Gyrator mit Parallelschaltung von  $C^S$  umwandeln und erhält ein zweites Ersatzschaltbild nach Abb. 5.

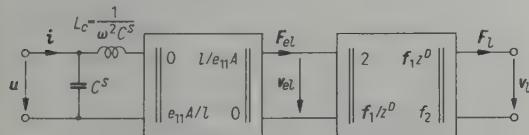


Abb. 5. Zweites Ersatzschaltbild des Dickenschwingers.

Transformiert man die frequenzabhängige Induktivität (negative Kapazität) auf die mechanische Seite, so erhält man die Abb. 6.

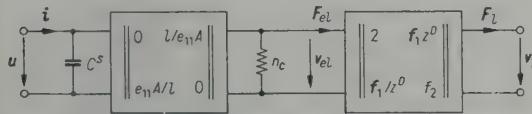


Abb. 6. Zweites Ersatzschaltbild des Dickenschwingers mit negativer Nachgiebigkeit.

Die negative Nachgiebigkeit  $n_c$  lässt sich noch einfacher ausdrücken: (20)

$$n_c = -\frac{l^2}{e_{11}^2 A^2} C^S = -\frac{e_{11}^S}{e_{11}^2} \frac{c_{11}^{D'}}{A c_{11}^{D'}} = -\frac{1}{k^2} n^D.$$

Der zweiten Matrix in Abb. 4 kann man eine einfache Ersatzschaltung zuordnen. Man stellt zunächst fest, daß  $\Delta A = 1$  ist. Wäre  $A_{11}$  dieser Matrix auch noch gleich Eins, so könnte man als Ersatzschaltung ein halbes T-Glied nach Abb. 7

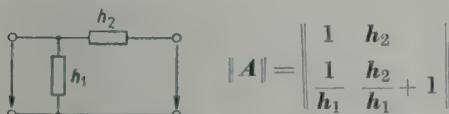


Abb. 7. Ersatzschaltbild für Kettenmatrix mit  $A_{11} = 1$  und  $\Delta A = 1$ .

wählen. Das kann man jedoch leicht erreichen, wenn man einen idealen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis  $v_1/v_2 = 2$  absplittet:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & f_1 z^D/2 \\ 2f_1/z^D & 2f_2 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Aus dem Vergleich der Restmatrix mit dem halben T-Glied in Abb. 7 liest man

$$h_2 = f_1 \frac{z^D}{2}, \quad h_1 = \frac{1}{f_1} \frac{z^D}{2} \quad (22)$$

ab. Die Funktion  $f_1(\eta)$  (siehe Gl. (14)) kann man vereinfachen zu

$$f_1(\eta) = \frac{j \sin \eta}{\cos \eta - 1} = -\frac{2 j \sin(\eta/2) \cos(\eta/2)}{2 \sin^2(\eta/2)} = \frac{1}{j \tan(\eta/2)}. \quad (23)$$

Zusammengefaßt erhält man also als Ersatzschaltung für  $\|A\|$  die Abb. 8.

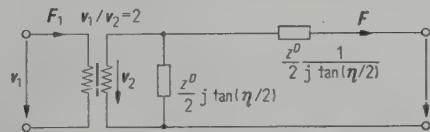


Abb. 8. Ersatzschaltbild für zweite Matrix von Abb. 6.

Die erste Resonanz des mechanischen Systems liegt bei  $\eta = \pi$ . Mit der Bedeutung von  $\eta = \omega/\omega_0$  lässt sich  $1/j \tan(\eta/2)$  um die Stelle  $\eta = \pi$  entwickeln:

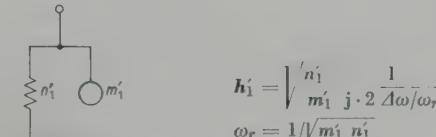
$$\frac{1}{j \tan(\eta/2)} = j \frac{\pi}{4} \frac{2(\omega - \omega_r)}{\omega_r} + \dots, \\ \omega_r = \pi \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{m n^D}}.$$

Damit erhält man aus Gl. (22)

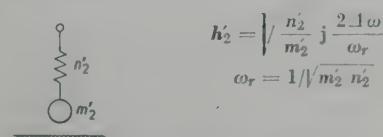
$$h_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{n^D}{m}} \frac{1}{j \cdot 2 \Delta \omega_r / \omega_r}, \\ h_2 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{n^D}{m}} j \frac{2 \Delta \omega_r}{\omega_r}. \quad (24)$$

Vergleicht man Gl. (24) mit den Mitgängen eines Parallel- bzw. Reihenkreises der Abb. 9, so erhält man für die äquivalenten Massen und Nachgiebigkeiten (25)

$$m'_1 = \frac{1}{2} m, \quad n'_1 = n^D \frac{2}{\pi^2}, \quad m'_2 = \frac{8}{\pi^2} m, \quad n'_2 = \frac{1}{8} n^D.$$



$$h'_1 = \sqrt{\frac{n'_1}{m'_1}} j \frac{2 \Delta \omega}{\omega_r}, \\ \omega_r = 1/\sqrt{m'_1 n'_1}$$



$$h'_2 = \sqrt{\frac{n'_2}{m'_2}} j \frac{2 \Delta \omega}{\omega_r}, \\ \omega_r = 1/\sqrt{m'_2 n'_2}$$

Abb. 9. Mechanischer Parallel- und Reihenkreis.

Das dazugehörige Ersatzschaltbild wird dann durch Abb. 10 dargestellt.

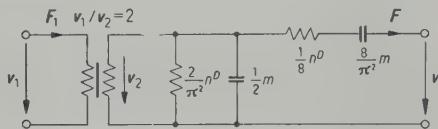


Abb. 10. Ersatzschaltbild für zweite Matrix von Abb. 6 in der Umgebung der ersten Resonanz.

Zusammenfassend ergeben sich schließlich für den Dickenschwinger die beiden folgenden Ersatzschaltbilder der Abb. 11. Der mechanische Transformator ist dabei mit dem elektromechanischen Kopplungsvierpol zusammengefaßt worden.

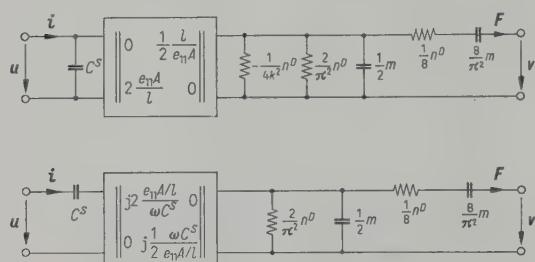


Abb. 11. Ersatzschaltbild des Dickenschwingers in der Umgebung der ersten Resonanz.

### 1.2.2. Längsschwinger

#### a) Verkopplungsgleichungen

Die mathematische Behandlung einer longitudinalen Dehnungsschwingung ist auf einfache Weise nur für den unendlich dünnen Stab möglich, weil dort nur die Randbedingungen an den Stirnflächen des Stabes beachtet zu werden brauchen. Die mit diesen Annahmen erhaltenen Ergebnisse werden also nur für einen Schwinger gelten, dessen Längsausdehnung wesentlich größer als seine Querabmessungen ist.

Zur Beschreibung des Längsschwingers wird man zunächst die mechanische Spannung als unabhängige Veränderliche wählen, weil im wesentlichen nur  $T_1$  vorhanden ist [10]. Für den praktisch stets verwendeten Fall, daß nur zwei gegenüberliegende Seitenflächen zur Anregung mit Elektroden versehen sind und alle anderen Flächen nicht metallisiert sind, existiert nur eine Komponente der elektrischen Feldstärke in Richtung der Erregung. Als zweite unabhängige Veränderliche ist also zweckmäßig die elektrische Feldstärke zu wählen. Das Gleichungssystem (2a) reduziert sich also auf die einfache Form der Gl. (2c), wenn man die Stabachse mit der  $x_3$ -Achse und die Erregungsrichtung mit der  $x_3$ -Achse zusammenfallen läßt (Abb. 12):

$$\begin{aligned} D_3 &= -d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3, \\ S_1 &= -s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3. \end{aligned} \quad (2c)$$

Um sämtliche Eigenschaften eines Längsschwingers bequem erkennen zu können, ist es wiederum zweckmäßig, eine den Gleichungssystemen (1a), (3a) und (4a) entsprechende Form zu wählen. Man erhält dann

$$D_3 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} S_1 + \varepsilon_{33}^T (1 - k^2) E_3, \quad (1c)$$

$$T_1 = -\frac{1}{s_{11}^E} S_1 + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3;$$

$$S_1 = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T} D_3 - s_{11}^E (1 - k^2) T_1, \quad (3c)$$

$$E_3 = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T} D_3 + \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T} T_1;$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{31}} \frac{k^2}{1 - k^2} D_3 - \frac{1}{s_{11}^E (1 - k^2)} S_1, \quad (4c)$$

$$E_3 = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T (1 - k^2)} D_3 - \frac{1}{d_{31}} \frac{k^2}{1 - k^2} S_1;$$

$$s_{11}^{D'} = s_{11}^E (1 - k^2), \quad \varepsilon_{33}^{S'} = \varepsilon_{33}^T (1 - k^2).$$

Darin ist  $k^2 = d_{31}^2 / \varepsilon_{33}^T s_{11}^E$  der elektromechanische Kopplungsgrad für diese Schwingungsart mit der gleichen physikalischen Bedeutung wie beim Dickenschwinger. Der Strich bei  $s_{11}^{D'}$  und  $\varepsilon_{33}^{S'}$  soll wieder daran erinnern, daß diese Größen nur in Sonderfällen mit  $s_{11}^D$  und  $\varepsilon_{33}^T$  identisch sind. Aus diesen Gleichungen kann man sämtliche Übersetzungsverhältnisse sowie die dielektrischen und elastischen Konstanten entnehmen. Zur Ableitung des Ersatzschaltbildes soll Gl. (1c) verwendet werden.

#### b) Vierpolersatzschaltbild

Den Betrachtungen soll ein Stab gemäß Abb. 12 zugrunde gelegt werden. Da hier keine Verwechslungen mehr geschehen können, sollen im folgen-

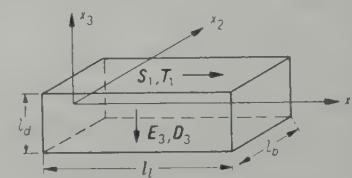


Abb. 12. Längsschwinger.

den die Indizes an den Größen  $T$ ,  $S$ ,  $D$  und  $E$  fortgelassen werden. Zur Ableitung des Ersatzschaltbildes wird am zweckmäßigsten das Gleichungssystem (1c) benutzt. Dabei sollen noch die Größen  $v = j\omega\xi$  und  $H_n^E = j\omega l s_{11}^E$  eingeführt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} j\omega \mathbf{D} &= \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{d\mathbf{v}}{dx} + j\omega \varepsilon_{33}^S \mathbf{E}, \\ \mathbf{T} &= -\frac{l}{H_n^E} \frac{d\mathbf{v}}{dx} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Größe  $l$  in  $H_n^E$  ist wieder vorläufig noch unbestimmt und wird später zweckmäßig gleich der Schwinglänge  $l_1$  gesetzt. Ein Vergleich der ersten Gleichung von (5) mit der zweiten Gleichung von (26) zeigt, daß die Abb. 3 auch für den Längsschwinger gilt, wenn man  $e_{11}/\varepsilon_{11}^S$  mit  $d_{31}/s_{11}^E$ ,  $\mathbf{D}$  mit  $\mathbf{E}$  und  $H_n^D$  mit  $H_n^E$  vertauscht (Abb. 13). Die zu Gl. (7) analoge Bedingung  $d\mathbf{E}/dx_1 = 0$  gilt hier ebenfalls, weil die zur  $x_1$ -Achse senkrechten Flächen metallisiert sind, und weil  $\mathbf{E}$  in der Richtung  $x_3$  konstant ist, da die Schwingung in der Richtung  $x_1$  erfolgt.

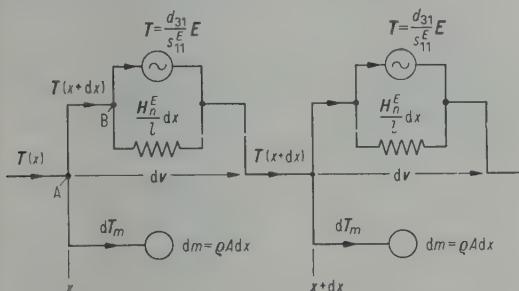


Abb. 13. Leitungsmodell des Längsschwingers.

Mit Rücksicht auf die notwendigen Vertauschungen erhält man also aus Gl. (13) als erste Vierpolgleichung

$$\frac{f_1}{Z^E} \mathbf{v}_l + f_2 \mathbf{T}_l = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \mathbf{E}. \quad (27)$$

Durch Gl. (28) sollen zur Abkürzung wieder neue Größen eingeführt werden (vgl. Abb. 12)

$$\begin{aligned} \eta &= \omega \sqrt{M N^E} = \omega \sqrt{m n^E} = \omega / \omega_0, \\ m &= \rho l_1 l_b l_d, \end{aligned}$$

$$Z^E = \sqrt{N^E / M} = l_d l_b \sqrt{n^E / m} = l_d l_b z^E; \quad (28)$$

$$n^E = \frac{N^E}{l_d l_b} = \frac{s_{11}^E l_d}{l_b l_d} = \frac{\xi}{F}.$$

An die Stelle von  $A$  tritt also  $l_b l_d$ . Führt man  $\mathbf{u} = E l_d$  und  $\mathbf{F} = \mathbf{T} l_d l_b$  ein, so erhält man

$$\frac{f_1}{z^E} \mathbf{v}_l + f_2 \mathbf{F} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} l_b \mathbf{u}. \quad (29)$$

Durch Integration erhält man aus der ersten Gleichung von (26) die zweite der gesuchten Vierpolgleichungen (Gl. (30))

$$j\omega \mathbf{D} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{d\mathbf{v}}{dx} + j\omega \varepsilon_{33}^S \mathbf{E} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \int \int j\omega \mathbf{D} dx_1 dx_2 = j\omega l_b \int_0^{l_1} \mathbf{D} dx_1; \\ (\mathbf{i} - j\omega C^S \mathbf{u}) \frac{s_{11}^E}{l_b d_{31}} &= \mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0). \end{aligned} \quad (30)$$

Den Ausdruck für  $\mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0)$  kann man wieder unter Berücksichtigung der notwendigen Vertauschungen aus Gl. (11) entnehmen und erhält

$$\mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_l \left( 1 - \frac{1}{\cos \eta} \right) + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \mathbf{E} j \tan \eta \cdot Z^E. \quad (31)$$

Mit Gl. (27) für  $\mathbf{E}$  kann man  $\mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0)$  durch  $\mathbf{v}_l$  und  $\mathbf{F}_l$  ausdrücken

$$\mathbf{v}_l - \mathbf{v}(0) = 2 \mathbf{v}_l + f_1 z^E \mathbf{F}_l \quad (32)$$

und erhält schließlich die Vierpolgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{s_{11}^E}{l_b d_{31}} (\mathbf{i} - j\omega C^S \mathbf{u}) &= 2 \mathbf{v}_l + f_1 z^E \mathbf{F}_l = \mathbf{v}_{el}, \\ \frac{l_b d_{31}}{s_{11}^E} \mathbf{u} &= \frac{f_1}{z^E} \mathbf{v}_l + f_2 \mathbf{F}_l = \mathbf{F}_{el}. \end{aligned} \quad (33)$$

Daraus entnimmt man das Ersatzschaltbild nach Abb. 14. Das Ersatzschaltbild mit der



Abb. 14. Erstes Ersatzschaltbild des Längsschwingers.

Reihenschaltung von  $C^S$  wird hier viel komplizierter und sei nur zum Vergleich mit dem Dickenschwinger angeführt (Abb. 15).

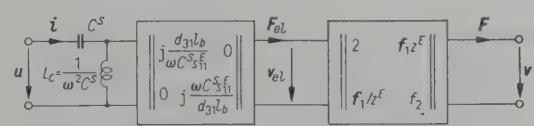


Abb. 15. Zweites Ersatzschaltbild des Längsschwingers.

Der mechanische Vierpol stimmt mit dem schon beim Dickenschwinger aufgetretenen Vierpol überein. Benutzt man die dort gefundene Ersatzschaltung (Abb. 10), so gilt in der Umgebung der ersten Resonanz für den Längsschwinger das Ersatzschaltbild nach Abb. 16.

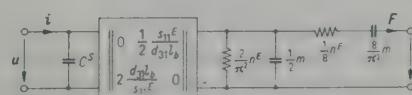


Abb. 16. Ersatzschaltbild des Längsschwingers in der Umgebung der ersten Resonanz.

## 2. Magnetostriktive Wandler

### 2.1. Statische Verkopplungsgleichungen

Die Magnetostriktion ist das physikalische Analogon zur Piezoelektrizität. Man stellt wieder ganz allgemein fest, daß zwischen den vier beteiligten Größen (zwei elektrische und zwei mechanische) zwei Gleichungen bestehen. Wegen der Nichtlinearität dieser Beziehungen ist es ebenfalls zweckmäßig, kleine Abweichungen um einen Arbeitspunkt zu betrachten. Man kann also ähnliche Gleichungssysteme wie (1a) bis (4a) aufstellen. Um auch formal eine möglichst vollständige Analogie zwischen Piezoelektrizität und Magnetostriktion herzustellen, ist es nötig, die Verkopplungsgrößen analog zu definieren. Dabei entsteht sofort die Frage, welche der elektrischen Größen  $E, D$  welcher magnetischen Größe  $H, B$  zuzuordnen ist. Betrachtet man die Ausdrücke für die potentielle Energie

$$dU_m = H dB, \quad dU_{el} = E dD \quad (34)$$

und die im Innern des magnetostriktiven bzw. piezoelektrischen Materials gültigen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (35)$$

so sieht man, daß für einen sinnvollen Vergleich zwischen den beiden Gebieten mit dem Ziel, eine Energieumwandlung zu beschreiben, die Analogie  $E \triangleq H$  und  $D \triangleq B$  zweckmäßig ist.

Die große Bedeutung der umgekehrten Analogie  $E \triangleq B$  und  $H \triangleq D$  bei vielen elektromagnetischen Vorgängen [9] zeigt, daß je nach den betrachteten Vorgängen sowohl die eine als auch die andere Analogie sinnvoll sein kann.

Als magnetostriktive Schwinger werden im wesentlichen stabförmige Gebilde verwendet, bei denen die magnetischen Größen in Richtung der Stabachse liegen. Die Anregungsart entspricht also der des piezoelektrischen Dickenschwingers, wohingegen die mechanische Schwingungsform mit der des piezoelektrischen Längsschwingers zu vergleichen ist. Bei der Definition der magnetostriktiven Verkopplungskonstanten schreibt man nun nicht wie im elektrischen Fall die Beziehungen für das unendlich ausgedehnte Medium an, sondern beschränkt sich auf den Fall des stabförmigen Schwingers, mit Anregung parallel zur Schwingungsrichtung (Stabachse). Man erhält dann in Anlehnung an die Gleichungen (1c) bis (4c) mit der Analogie  $B \triangleq D$  und  $E \triangleq H$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= e_m \mathbf{S} + \mu^S \mathbf{H}, \\ \mathbf{T} &= -\frac{1}{s^H} \mathbf{S} + e_m \mathbf{H}; \end{aligned} \quad (1d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -d_m \mathbf{T} + \mu^T \mathbf{H}, \\ \mathbf{S} &= -s^H \mathbf{T} + d_m \mathbf{H}; \end{aligned} \quad (2d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= g_m \mathbf{B} - s^B \mathbf{T}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu^T} \mathbf{B} + g_m \mathbf{T}; \end{aligned} \quad (3d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= h_m \mathbf{B} - \frac{1}{s^B} \mathbf{S}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu^S} \mathbf{B} - h_m \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (4d)$$

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Konstanten findet man durch Umformen der einzelnen Systeme ineinander. Man erhält dabei die Gleichungen

$$\begin{aligned} s^H/s^B &= \mu^T/\mu^S = 1/(1 - k^2), \\ g_m &= k^2/e_m, \quad h_m = g_m/s^B, \quad e_m = d_m/s^H, \\ k^2 &= e_m^2 s^B/\mu^S = d_m^2/\mu^T s^H = g_m^2 \mu^S/s^B = h_m^2 s^B \mu^S. \end{aligned} \quad (36)$$

Zur späteren Verwendung kann man Gl. (4c) etwas umschreiben. Es soll eingeführt werden:

$$dv/dx = j\omega S, \quad H_n^B = j\omega s^B l = j\omega N^B.$$

$l$  ist dabei wieder eine durch die Randbedingungen bestimmte Größe, die sich später als die Stablänge erweisen wird. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= h_m \mathbf{B} - \frac{l}{H_n^B} \frac{dv}{dx}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu^S} \mathbf{B} - \frac{h_m}{j\omega} \frac{dv}{dx}. \end{aligned} \quad (37)$$

### 2.2. Vierpolgleichungen und Ersatzschaltbilder

Zur Ableitung des Ersatzschaltbildes soll ein Modell nach Abb. 17 benutzt werden. Der schwingende Stab  $a$  sei an den Stellen 1 und 2 in der Längsrichtung frei beweglich, jedoch ohne Luftsputz gelagert. Die Länge  $\Delta l$  sei klein im Ver-

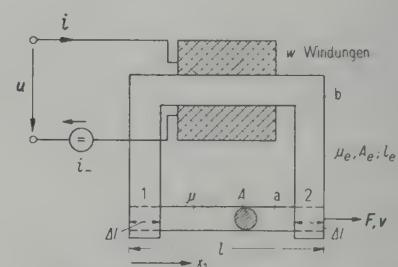


Abb. 17. Modell eines magnetostriktiven Schwingers.

gleich zu  $l$ , d. h., es wird angenommen, daß die ganze Stablänge  $l$  von einem örtlich konstanten Fluss  $\Phi$  durchsetzt sei. Das piezoelektrische Analogon hierzu in bezug auf die Anregung ist der Dickenschwinger mit einem nicht piezoelektrischen Dielektrikum, z. B. einem Luftsputz zwischen Kristall und Elektroden. Zunächst ist der Einfluß der nicht beliebig großen magnetischen

Leitfähigkeit des Eisenstückes abzuspalten<sup>2</sup>. Das geschieht durch eine zum Eingang parallel geschaltete Induktivität  $L_e = w^2/R_{me}$ ,

$$i_1 = \frac{\theta_{\text{ges}}}{w} = \frac{\theta}{w} + \frac{\theta}{w} R_{me} = i + \frac{u}{j\omega L_e}, \quad (38)$$

$$i = \theta/w.$$

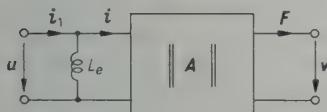


Abb. 18. Abspaltung des Einflusses der Teile des Eisenkreises, die zur Heranführung des Fluxes an das magnetostriktive Material dienen ( $R_{me} \triangleq$  magnetischer Widerstand des Stücks b,  $R_{me} = l_e/\mu_e A_e$ ).

$\theta$  ist dann die magnetische Spannung längs des Stabes a.  $L_e$  würde man messen, wenn der Stab a einen magnetischen Kurzschluß darstellte. Den Stab a zerlegt man analog Abb. 3 in differentielle Elemente aus Massen, Federn und Bewegungsquellen (Abb. 19).

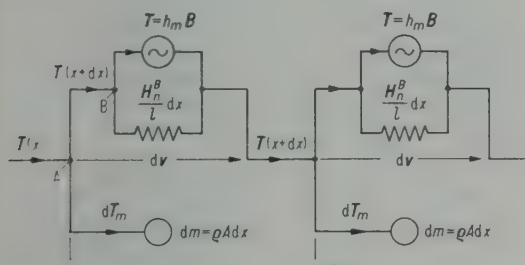


Abb. 19. Leitungsmodell des magnetostriktiven Schwingers.

Mit der Gleichung  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  erhält man aus Gl. (37) durch Vergleich mit Gl. (5) bis (8)

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{H_n^B}{H_m} \frac{1}{l^2} v = 0. \quad (39)$$

Im folgenden werden wieder die neuen Größen

$$\eta = \omega/\omega_0 = \omega \sqrt{MN^B} = \omega \sqrt{n^B m},$$

$$Z^B = \sqrt{N^B/M} = A \sqrt{n^B/m}, \quad (40)$$

$$n^B = N^B/A = s^B l/A = \xi/F, \quad m = \varrho l A = M A$$

verwendet. Damit bekommt man durch Vergleich mit den Gl. (9) bis (13) die erste Vierpolgleichung

$$\frac{j \sin \eta}{\cos \eta - 1} \frac{1}{Z^B} v_l + \frac{\cos \eta}{\cos \eta - 1} T_l = h_m B \quad (41)$$

<sup>2</sup> Bei der Behandlung des elektromagnetischen Wandlers in Teil I wurde der Einfluß des Eisenkerns zum Unterschied zu der hier gegebenen Darstellung näherungsweise durch eine Veränderung der Elemente des Kopplungsvierpols beschrieben. Die hier vorgenommene Abspaltung von  $L_e$  ist jedoch exakt.

und mit den neuen Größen

$$z^B = Z^B/A, \quad F = TA, \quad u = j\omega B w A \quad (42)$$

erhält man

$$f_1 \frac{1}{z^B} v_l + f_2 F_l = \frac{h_m}{j\omega w} u. \quad (43)$$

Durch Integration der zweiten Gleichung von (37)

$$i = \frac{\theta}{w} = \frac{1}{w} \int_0^l H dx = \frac{1}{w} \int_0^l \left( \frac{1}{\mu^S} B - \frac{h_m}{j\omega} \frac{dv}{dx} \right) dx$$

erhält man

$$i = \frac{l}{w^2 \mu^S A} \frac{u}{j\omega} - \frac{h_m}{j\omega w} [v_l - v(0)], \quad (44)$$

$$\left( i - \frac{u}{j\omega L^S} \right) \frac{1}{j} \frac{\omega w}{h_m} = v_l - v(0). \quad (45)$$

Durch Vergleich mit den Gl. (16) bis (18) erhält man schließlich die Vierpolgleichungen

$$\left( i - \frac{u}{j\omega L^S} \right) \frac{1}{j} \frac{\omega w}{h_m} = 2 v_l + f_1 z^B F_l = v_{el}, \quad (46)$$

$$u \frac{1}{j} \frac{h_m}{\omega w} = f_1 z^B v_l + f_2 F_l = F_{el}.$$

Daraus liest man das Ersatzschaltbild nach Abb. 20 ab.

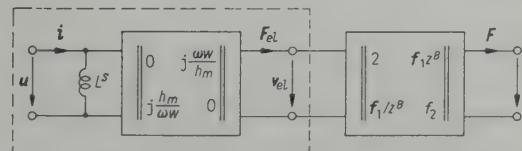


Abb. 20. Erstes Ersatzschaltbild des magnetostriktiven Schwingers.

Durch eine Umformung des eingerahmten Teiles erhält man ähnlich wie in Abb. 5 die Abb. 21.

Für  $L^S h_m / w$  kann man bei Einführung von  $h_m = e_m / \mu^S$  auch  $w e_m A / l$  schreiben und so die Analogie zum piezoelektrischen Dickenschwinger vollständig machen. Die Richtigkeit der Umformungen bestätigt man leicht durch Ausrechnen der Gesamtmatrix in beiden Fällen.

Will man die Parallelschaltung von  $L^S$  beibehalten, was wegen der schon vorhandenen Induktivität  $L_e$  (siehe Abb. 18) zweckmäßig erscheint, so kann man den eingerahmten Teil in Abb. 20 auch noch nach Abb. 22 umformen, was man wiederum leicht durch Ausrechnen der zur oberen Schaltung gehörenden Matrizen bestätigt.

Die Elemente der ersten Matrix lassen sich dazu in der folgenden Form schreiben:

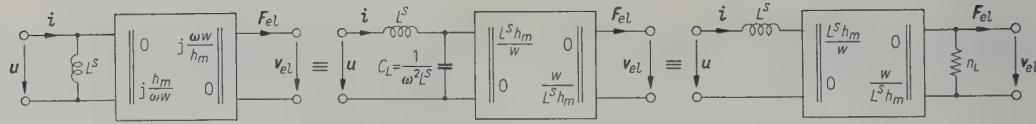


Abb. 21.

Zweites Ersatzschaltbild des magnetostruktiven Schwingers ( $1/j\omega C_L = j\omega(-L^S)$ ,  $n_L = -w^2/L^S h_m^2 = -n^B/k^2$ ).

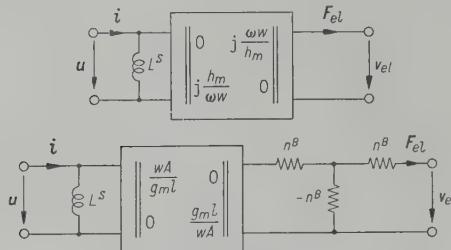


Abb. 22. Ersatzschaltbild mit Parallelschaltung von  $L^S$  und reelem Kopplungsvierpol beim magnetostruktiven Schwinger.

$$j \frac{\omega w}{h_m} = \frac{j \omega s^B l / A}{h_m \frac{s^B l}{w} \frac{A}{A}} = j \omega n^B \frac{1}{g_m l / A w},$$

$$j \frac{h_m}{\omega w} = -\frac{1}{j \omega n^B} g_m \frac{l}{A w}.$$

Die Ersatzschaltung für den mechanischen Vierpol kann man aus Abb. 12 entnehmen und erhält damit die Ersatzschaltbilder des magnetostruktiven Wandlers (Abb. 23).

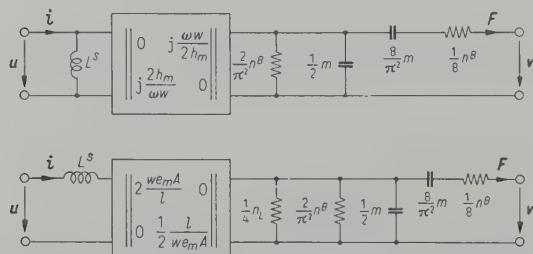


Abb. 23. Ersatzschaltbilder des magnetostruktiven Wandlers in der Umgebung der Resonanz ( $n_L = -n^B/k^2$ ).

### 3. Diskussion, Systematik

Bei einer vergleichenden Betrachtung der Ersatzschaltbilder sämtlicher hier betrachteter Wandler stellt man fest, daß alle Wandler, die sich elektrischer Felder zur Energieumwandlung bedienen, durch ein Ersatzschaltbild nach Abb. 24 dargestellt werden können.

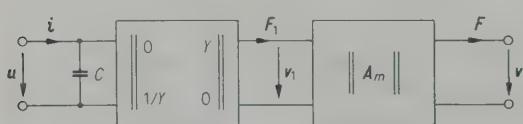


Abb. 24. Ersatzschaltbild der elektrischen Wandler.

Sämtliche magnetischen Wandler lassen sich bei genügend großem  $\mu$  der Eisenteile, die zur Herleitung des Flusses an den Ort der Energieumwandlung (Luftspalt, magnetostruktives Material) dienen, durch ein Ersatzschaltbild nach Abb. 25 darstellen.  $C$  und  $L$  bedeuten Kapazität und Induktivität des festgebremsten Wandlers.

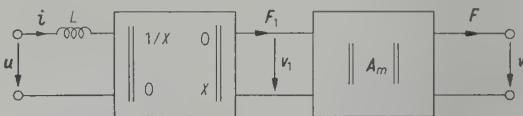


Abb. 25. Ersatzschaltbild der magnetischen Wandler.

Die beiden Ersatzschaltbilder besagen, daß bei allen elektrischen Wandlern die auf das System wirkende Kraft der anliegenden Spannung unmittelbar (ohne zeitliche Differentiation oder Integration) proportional ist. Bei den magnetischen Wandlern stehen Kraft und Strom in demselben Verhältnis zueinander.

Bei einigen Wandlern treten in diesen Ersatzschaltbildern im mechanischen Teil negative Nachgiebigkeiten auf. Transformiert man in den Abb. 5 und 11 des Teiles I die frequenzabhängigen Schaltelemente des elektrostatischen und elektromagnetischen Wandlers auf die mechanische Seite, so erhält man die Abb. 26.

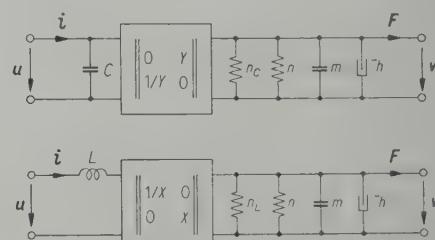


Abb. 26. Ersatzschaltbild des elektrostatischen (oben) und elektromagnetischen Wandlers (unten) ( $n_c = -Y^2 C$ ,  $n_L = -X^2 L$ ).

Für das Auftreten dieser Nachgiebigkeiten kann man eine einfache physikalische Erklärung geben. In Abb. 26 ist  $n$  die Nachgiebigkeit des Systems ohne Polarisationsgröße, d. h. die Nachgiebigkeit, die man dem mechanischen System ohne elektromechanische Rückwirkung zuordnen muß. Legt man eine Polarisationsgröße an, so wirkt zusätzlich eine vom Ausschlag abhängige

Kraft auf das mechanische System, die im elektrischen Fall durch die Gleichung

$$F' = \frac{u^2 C^2}{2\varepsilon A} \quad (47)$$

gegeben ist (siehe Abb. 27). Sie entspricht bei  $u = \text{const}$  einer zusätzlichen Nachgiebigkeit

$$\frac{1}{n_C} = \frac{dF'}{ds} = \frac{u^2 2C}{2\varepsilon A} \frac{dC}{ds} = -\frac{u^2 C^2}{s^2} \frac{1}{C},$$

$$n_C = -Y^2 C.$$

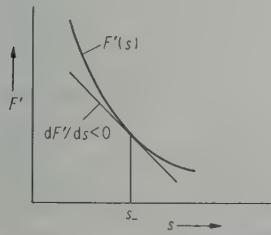


Abb. 27. Beispiel für eine Kraft-Weg-Abhängigkeit, die eine negative Nachgiebigkeit verursacht.

Eine ähnliche Betrachtung führt zu der Nachgiebigkeit  $n_L = -X^2 L$  im magnetischen Fall.

Aus dieser Erklärung der zusätzlichen Nachgiebigkeit darf man jedoch nicht schließen, daß diese bei allen polarisierten Wandlern auftritt. Die von F. A. FISCHER [1] beschriebenen tangentialen Wandlern sind ebenfalls polarisiert und trotzdem ist die im Ersatzschaltbild nach Abb. 24 bzw. 25 auftretende Nachgiebigkeit mit der ohne Polarisationsgröße identisch. Das bedeutet, daß bei diesen Wandlern in den Ersatzschaltbildern nach Abb. 24 bzw. 25 keine negativen Nachgiebigkeiten vorhanden sind.

Die Ursache dafür sieht man sofort ein, wenn man den Ausdruck für die Kraft anschreibt (Abb. 28).

$$F = \frac{1}{2} \frac{u^2}{s} b (\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (48)$$

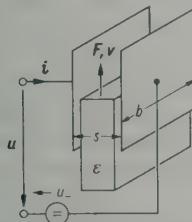


Abb. 28. Tangential-elektrischer Wandler

$$\left( F = \frac{1}{2} \frac{u^2}{s} b (\varepsilon - \varepsilon_0) \right).$$

Das bedeutet, daß die durch die Polarisationsspannung hervorgerufene Kraft unabhängig von der Auslenkung des Systems (in diesem Fall der Eintauchtiefe des Dielektrikums in den Konden-

sator) ist und somit also auch keine zusätzliche Federwirkung auftreten kann.

Für den elektrodynamischen Wandler gilt das gleiche. Die Kraft ist auch hier unabhängig vom Ausschlag und die Nachgiebigkeit des Systems ohne Polarisationsgröße ( $B$ ) ist gleich der im Ersatzschaltbild mit Reihenschaltung der Induktivität auftretenden Nachgiebigkeit.

Bei den Wandlern mit stetig verteilter Bewegungsanregung (piezoelektrische und magnetostruktive Wandlern) sind die Verhältnisse ähnlich. Betrachtet man zur Vereinfachung einseitig eingespannte Schwinger, so findet man für den quasi-statischen Fall Ersatzschaltbilder gemäß Abb. 29.

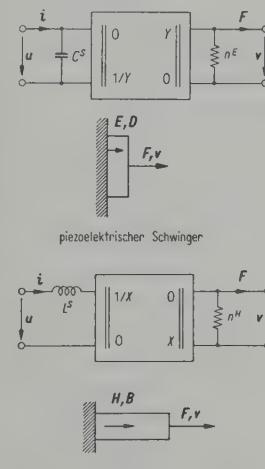


Abb. 29. Ersatzschaltbild für einseitig eingespannte Schwinger im quasistatischen Zustand.

Beim elektromagnetischen und beim elektrostatischen Wandler konnte man durch eine einfache Überlegung feststellen, welche der beiden an den mechanischen Klemmen meßbaren Nachgiebigkeiten (im elektrischen Leerlauf bzw. Kurzschluß) dem mechanischen System selbst ohne elektromechanische Rückwirkung zuzuordnen ist.

Es erhebt sich nun die Frage, welche der beiden Nachgiebigkeiten  $n^E$  und  $n^D$  bzw.  $n^H$  und  $n^B$  bei den Wandlern mit stetig verteilter Bewegungsanregung dem mechanischen System selbst ohne elektrische oder magnetische Rückwirkung zugeordnet werden kann. Es wird ähnlich wie bei der dielektrischen Konstante (siehe Einführung des Kopplungsgrades) die elastische Konstante sein, die man an den mechanischen Klemmen mißt, wenn man eine Speicherung elektrischer Energie verhindert. Das ist z. B. beim piezoelektrischen Wandler der Fall, wenn man durch Kurzschlie-

ßen der Elektroden die Ausbildung einer elektrischen Feldstärke sowohl außerhalb als auch innerhalb des piezoelektrischen Materials verhindert. Daraus folgt, daß  $n^E$  der Nachgiebigkeit  $n$  beim elektrostatischen Wandler entspricht. Sie beschreibt also das elastische Verhalten des Körpers ohne die infolge der piezoelektrischen Verkopplung mögliche Rückwirkung. Im magnetischen Fall spielt  $n^H$  die gleiche Rolle. Ein Vergleich der Ersatzschaltbilder in Abb. 26 und 29 zeigt, daß im Gegensatz zu den elektrostatischen und elektromagnetischen Wandlern bei den Wandlern mit stetig verteilter Bewegungsanregung die negative Nachgiebigkeit im Ersatzschaltbild mit Parallelschaltung der Kapazität und Reihenschaltung der Induktivität fehlt. Nach der Form ihres Ersatzschaltbildes entsprechen sie also den tangentialen Wandlern bzw. dem elektrodynamischen Wandler.

Im dynamischen Zustand, z. B. in der Umgebung der ersten Resonanz, sind die Verhältnisse nicht so einfach zu übersehen. Beim piezoelektrischen Längsschwinger wird aus der Nachgiebigkeit  $n^E$  eine kompliziertere Schaltung, die noch die Masse als Schaltelement enthält (Abb. 16). Beim piezoelektrischen Dickenschwinger tritt zwar dieselbe Schaltung auf, sie enthält jedoch  $n^D$  (Abb. 11). Das hängt damit zusammen, daß beim Längsschwinger  $E$  längs der Schwingungsrichtung konstant ist, wohingegen beim Dickenschwinger  $D$  längs der Schwingungsrichtung konstant ist. Wegen der Konstanz von  $B$  längs der Stabachse tritt dann beim magnetostriktiven Schwinger eine entsprechende Schaltung mit  $n^B$  auf (Abb. 23).

Da die Nachgiebigkeiten  $n^D$  und  $n^B$  nach den oben angestellten Überlegungen gegenüber den rein mechanisch bedingten Nachgiebigkeiten  $n^E$  und  $n^H$  noch zusätzlich eine elektromechanische Rückwirkung enthalten, ist es verständlich, daß beim Dickenschwinger und magnetostriktiven Schwinger noch eine Korrektur zu der beim Längsschwinger aufgetretenen mechanischen Schaltung hinzukommt. Diese Korrektur wird durch die negativen Nachgiebigkeiten  $-n^D/k^2$  und  $-n^B/k^2$  dargestellt, die bei kleinen Kopp lungsggraden zu vernachlässigen sind.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß nach der Form des Ersatzschaltbildes zwei Gruppen von Wandlern unterschieden werden können, und zwar solche, die als Nachgiebigkeit die des mechanischen Systems enthalten, und zum anderen solche, die zusätzlich noch eine negative Nachgiebigkeit aufweisen. Zur ersten Gruppe gehören der elektrodynamische und magnetostriktive Wandler, die tangentialen Wandler [1]

sowie die piezoelektrischen Wandlere. Zur zweiten Gruppe gehören der elektromagnetische und der elektrostatische Wandler.

Betrachtet man den physikalischen Mechanismus der Energieumsetzung näher, so findet man noch weitere Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wandlerarten. Wegen der weitgehenden Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Vorgängen findet man fast zu jedem elektrischen Wandler einen zweiten, dazu analogen in der Gruppe der magnetischen Wandlere. Solche zueinandergehörigen Paare von Wandlern sind der elektrostatische und der elektromagnetische Wandler sowie der piezoelektrische Wandler mit polykristallinen Medien (Bariumtitanat) und der ferromagnetostriktive Wandler (Nickel, Eisen).

Theoretisch kann man auch noch Kräfte an tangentialen Grenzschichten ausnutzen [1]. Das ergibt das Paar der tangentialen elektrischen und magnetischen Wandler. Das letztere Paar soll wegen seiner technischen Bedeutungslosigkeit nicht weiter betrachtet werden. Es bleiben noch zwei Wandler übrig, zu denen sich kein Analogon findet. Der eine ist der elektrodynamische Wandler und der andere der piezoelektrische Wandler mit Einkristallen. Um einzusehen, warum es zum elektrodynamischen Wandler kein Analogon gibt, kann man sich folgendes überlegen. Die Kräfte in magnetischen Feldern kann man auffassen als Kräfte zwischen Strömen. Betrachtet man zwei Ströme, so ist die Kraft zwischen ihnen dem Produkt beider Ströme proportional. Macht man beide Ströme gleich, so erhält man eine Abhängigkeit  $F \sim i^2$  (dynamometrischer Wandler und elektromagnetischer Wandler). Das elektrische Analogon dazu ist die Kraft, die zwischen zwei Ladungen besteht  $F \sim Q^2$ . Beim elektrodynamischen Wandler wird nun ein Strom konstant gehalten. Im elektrischen Fall müßte man also eine in einem konstanten Feld befindliche Ladungsmenge ändern und erhielte Kräfte  $F \sim Q$ . Einen solchen Wandler gibt es jedoch nicht.

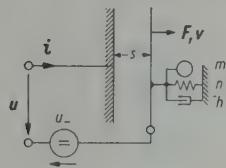
Das magnetische Analogon zum piezoelektrischen Wandler mit Einkristallen gibt es ebenfalls nicht. D. h., es gibt keine Verkopplung zwischen magnetischen und mechanischen Größen, bei denen die einen linear von den anderen abhängen.

Zur praktischen Anwendung sind die Ersatzschaltbilder der behandelten Wandler mit den dazugehörigen Konstanten in der beigefügten Tabelle zusammengefaßt.

Herrn Prof. Dr. W. REICHARDT bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung bei deren Abfassung zu großem Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 24. Oktober 1955.)

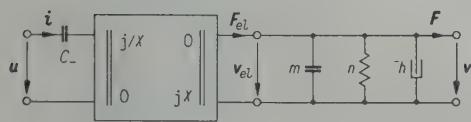
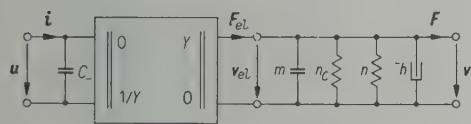
### 1. Elektrostatischer Wandler



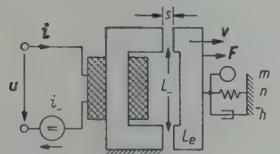
$$Y = -\frac{s_-}{u_- C_-},$$

$$X = Y \omega C_-$$

$$n_C = -Y^2/C_-$$



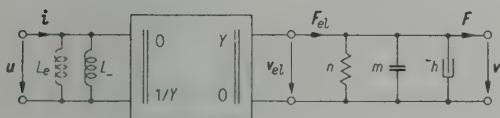
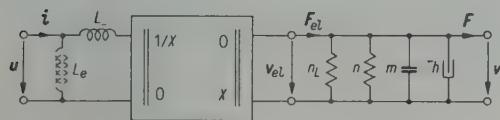
### 2. Elektromagnetischer Wandler



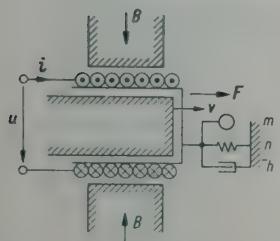
$$X = -\frac{2s_-}{i_- L_-},$$

$$Y = \omega L_- X$$

$$n_L = -X^2 L_-$$



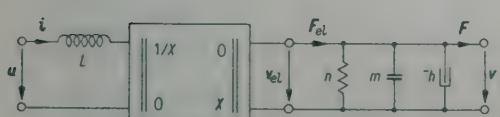
### 3. Elektrodynamischer Wandler



$$X = 1/Bl$$

$$l \triangleq \text{Länge des Wicklungsdrähtes}$$

$$B \triangleq \text{magnetische Induktion}$$



### 4. Piezoelektrische Wandler

#### Längsschwinger

$$Y = s_{11}^E/2 d_{31} l_b,$$

$$C^S = \epsilon_{33}^T (1 - k^2) l_b l_b / l_d,$$

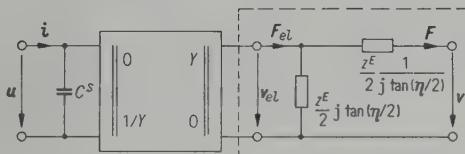
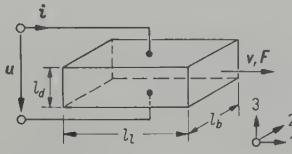
$$\eta = \omega \sqrt{mn^E},$$

$$z^E = \sqrt{n^E/m},$$

$$n^E = s_{11}^E l_b / l_b l_d,$$

$$m = \varrho l_b l_b l_d,$$

$$k^2 = d_{31}^2 / \epsilon_{33}^T s_{11}^E$$



#### Dickenschwinger

$$Y = l/2\epsilon_{11} A,$$

$$X = \omega C^S Y,$$

$$C^S = \epsilon_{11}^S A/l,$$

$$\eta = \omega \sqrt{m n^D},$$

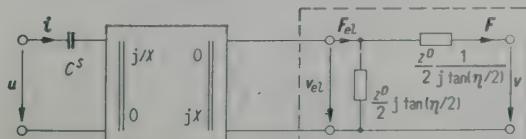
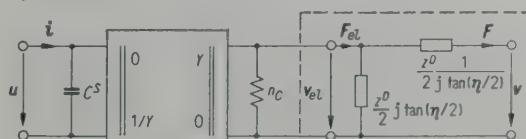
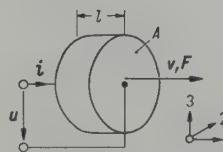
$$z^D = \sqrt{n^D/m},$$

$$n^D = (1 - k^2) l / \epsilon_{11}^E A,$$

$$m = \varrho l A,$$

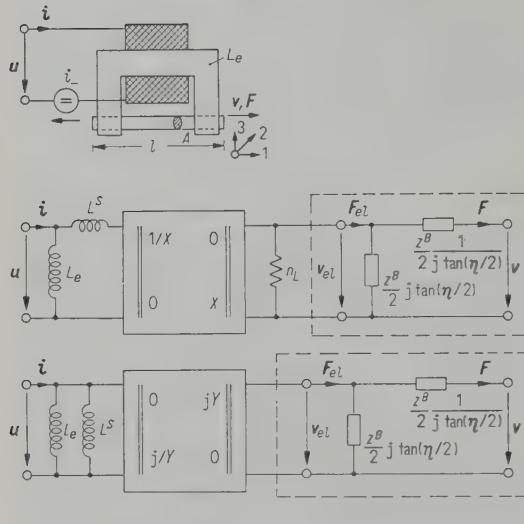
$$n_C = -Y^2 C^S / 4,$$

$$k^2 = 1 / [1 + (c_{11}^E \epsilon_{11}^S / \epsilon_{11}^2)]$$

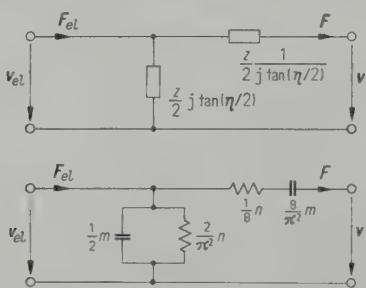


## 5. Magnetostriktiver Wandler

$$\begin{aligned}
 X &= l/2wemA, \\
 Y &= j\omega w/2h_m, \\
 \eta &: \omega \sqrt{mnB}, \\
 z^B &= \sqrt{nB/m}, \\
 LS &= w^2 \mu S A/l, \\
 n^B &= sBl/A, \\
 m &= \rho l A, \\
 n_L &= X^2 LS/4
 \end{aligned}$$



Ersatzschaltung für die umrahmten Vierpole in 4. und 5. in der Umgebung der Resonanz ( $\omega \approx \omega_r = \pi \omega_0 = \pi/\sqrt{mn}$ ).



## Bezeichnung und Vorzeichenfestsetzung

$$\begin{aligned}
 S &= \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_6/2 & S_5/2 \\ S_6/2 & S_2 & S_4/2 \\ S_5/2 & S_4/2 & S_3 \end{vmatrix} \\
 T &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_v & \text{mechanische Druckspannungen,} \\
 \xi_v & \text{Verrückungen,} \\
 v_v = \partial \xi / \partial t & \text{Schnelle,} \\
 S_v & \text{Dehnung}
 \end{aligned}$$

$F_v$	Kraft,
$A$	Fläche,
$E_v$	elektrische Feldstärke,
$D_v$	elektrische Verschiebung,
$H_v$	magnetische Feldstärke,
$B_v$	magnetische Induktion,
$\Phi$	magnetischer Fluß,
$\Theta$	magnetische Spannung,
$u$	elektrische Spannung,
$i$	Strom,
$U$	potentielle Energie / Volumen,
$d_{ij}$ , $e_{ij}$ , $g_{ij}$ , $h_{ij}$	piezoelektrische Konstanten,
$d_m$ , $e_m$ , $g_m$ , $h_m$	magnetostriktive Konstanten,
$k$	elektromechanischer Kopplungsfaktor,
$L$	Induktivität,
$C$	Kapazität,
$R_m$	magnetischer Widerstand,
$h = v/F$	mechanischer Mitgang,
$H = hA$	spezifischer Mitgang,
$z$ , $Z$	Wellenmitgang,
$n = \xi/F$	Nachgiebigkeit,
$N = nA$	spezifische Nachgiebigkeit,
$s_{ij}$ ( $S_{ij} = s_{ij} T_j$ )	elastische Konstanten* $i, j = 1, \dots, 6$ ,
$c_{ij}$ ( $T_i = c_{ij} S_j$ )	
$\varepsilon_{mn}$ ( $D_n = \varepsilon_{nm} E_m$ )	dielektrische Konstanten* $m, n = 1, \dots, 3$ ,
$\beta_{mn}$ ( $E_n = \beta_{nm} D_m$ )	
$\mu$	magnetische Permeabilität,
$w$	Windungszahl,
$\varrho$	Dichte.

Die oben angeschriebenen Indizes bei den elastischen bzw. dielektrischen Konstanten, z. B.  $\varepsilon^T = (\partial D / \partial E)_T$  bezeichnen die Größen, die bei Bildung der betreffenden Konstanten festgehalten werden müssen. In den Vierpolgleichungen und im mechanischen Teil der Ersatzschaltbilder wird die Analogie Spannung  $\rightarrow$  Schnelle, Strom  $\rightarrow$  Kraft benutzt.

\* Ein wiederholter Index in einem Produkt bedeutet eine Summation bezüglich dieses Index, z. B.  $s_{ik} T_k = \sum_k s_{ik} T_k$ .

## Schrifttum

- [1] FISCHER, F. A., Grundzüge der Elektroakustik. Fachverlag Schiele & Schön, Berlin 1950.
- [2] REICHARDT, W., Grundlagen der Elektroakustik, 2. Aufl. Akad. Verlagsges., Leipzig 1954.
- [3] MASON, W. P., Electromechanical transducers and wave filters. D. van Nostrand Co., New York 1942.
- [4] SCHÖNFELD, H., Das Ersatzschaltbild des ferromagnetostriktiven Wandlers. Frequenz 5 [1951], 331.
- [5] SIXTUS, K., Über Ferritschwinger. Frequenz 5 [1951], 335.
- [6] FELDTKELLER, R., Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1944.
- [7] MASON, W. P., Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics. D. van Nostrand Co., New York 1950.
- [8] CADY, W. G., Piezoelectricity. McGraw Hill Book Co., New York 1946.
- [9] SOMMERFELD, A., Vorlesungen über theoretische Physik, Band III. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947.
- [10] VON LAUE, M., Piezoelektrisch erzwungene Schwingungen von Quarzstäben. Z. Phys. 34 [1925], 347.

# LES TRANSDUCTEURS ET LEURS SCHÉMAS ÉLECTRIQUES ÉQUIVALENTS; APPLICATION AUX MICROPHONES

par N. ROUCHE

Bell Telephone Mfg. Cy., Anvers, Belgique

## Sommaire

On montre qu'on peut établir une systématique analogue à celle de F. A. FISCHER (qui a déduit les équations et les propriétés des transducteurs usuels, des équations de Lagrange-Maxwell), sur une base plus générale en cherchant quelles sont toutes les formes possibles d'équations de transduction compatibles avec le principe de la conservation de l'énergie.

## Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß man eine Wandlersystematik ähnlich der von F. A. FISCHER (welcher die Gleichungen und Eigenschaften der üblichen Wandler aus den Maxwell'schen Gleichungen herleitete) auf einer noch allgemeineren Basis aufstellen kann, indem man sämtliche möglichen Übertragungsgleichungen aufsucht, die dem Prinzip von der Erhaltung der Energie genügen.

## Summary

It is shown that a systematic analogous to that set up by F. A. FISCHER, who deduced the equations of common transducers from those of Lagrange and Maxwell, can be established on a general basis. All possible forms of the equations of transduction compatible with the conservation of energy are examined to this end.

### 1. Préliminaire

On s'est beaucoup occupé, ces dernières années et surtout en Allemagne, d'établir une systématique des transducteurs électromécaniques et de leurs propriétés. Citons entre autres les travaux de F. A. FISCHER [1], [2], [3], [4], [5], H. HECHT [5], [6], R. FELDTKELLER et W. NONNENMACHER [7], W. REICHARDT et A. LENK [8], P. M. PRACHE [9]. Une telle systématique est incontestablement utile, non seulement parce que, d'un point de vue théorique, elle établit clairement la structure de cet important problème, mais encore parce que les caractères des différents transducteurs s'éclairent l'un l'autre par comparaison.

F. A. FISCHER a déduit les équations et les propriétés des transducteurs usuels, des équations de Lagrange-Maxwell. Nous comptons montrer qu'on peut établir une systématique analogue sur une base plus générale: en cherchant quelles sont toutes les formes possibles d'équations de transduction compatibles avec le principe de la conservation de l'énergie. On peut montrer ainsi:

a) que tous les transducteurs linéaires sont soit des transformateurs idéaux, soit des gyrateurs idéaux, au sens de TELLEGREN [10].

b) que tous les transducteurs non-linéaires usuels appartiennent à une même classe, qu'on pourrait appeler classe des transducteurs monodéphasateurs entre variables d'énergie. Nous reviendrons plus loin sur le sens de cette expression.

La méthode appliquée dans la seconde partie de cette étude consiste à ne pas passer immédiatement à l'étude du fonctionnement des transducteurs autour d'une polarisation, autrement dit à ne pas linéariser trop vite les équations des transducteurs non-linéaires, et cela de manière à établir clairement, sur des équations plus exactes, les parentés réelles entre transducteurs. Cette méthode nous permettra également de donner des schémas équivalents respectant au mieux l'ordre physique des choses.

Précisons enfin que nous n'étudierons que les transductions réversibles entre énergies concentrées, si on veut bien appeler énergie concentrée toute énergie qui est, non pas localisée dans une portion d'espace infiniment petite, mais définie comme fonction de deux variables seulement.

### 2. Système mono-énergétique

Rappelons quelques notions simples utiles pour la suite. Si on appelle système mono-énergétique tout engin renfermant une seule forme d'énergie

$$E = f(x, y)$$

on sait que l'accroissement élémentaire de cette énergie s'écrit:

$$dE = y dx.$$

$y$  est la variable de tension,  $x$  la variable de position ou d'extension. Nous appellerons l'ensemble de  $y$  et  $x$ , variables d'énergie, et l'en-

semble de  $y$  et  $dx/dt$ , variables de puissance. Un système mono-énergétique isolé est caractérisé par la relation

$$y dx = 0.$$

Cette relation devant être valable quelque soit  $y$ , implique  $dx = 0$  et donc  $x = \text{const}$ . La relation  $E = f(x, y)$  étant finie, on a également  $y = \text{const}$ . Un système mono-énergétique isolé est donc entièrement statique. Le schéma le plus simple d'un système évoluant dans le temps sera celui d'un transducteur entre deux systèmes mono-énergétiques.

Un système mono-énergétique isolé dont on connaît l'énergie est entièrement défini; il existe en plus de  $E = f(x, y)$  une deuxième relation finie entre  $y$  et  $x$ . Nous écrirons cette relation qui est caractéristique du système, sous la forme

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Un système mono-énergétique est linéaire quand cette relation est linéaire. On sait qu'alors l'énergie est une fonction rectangle de  $y$  et  $x$ . Plus exactement

$$E = \frac{1}{2} y x.$$

Quand le système est non-linéaire, l'énergie n'est plus en général une fonction rectangle de  $y$  et  $x$ . Elle l'est cependant encore si la relation (1) est de la forme

$$y = m x^n$$

où  $m$  et  $n$  sont des constantes. On a alors

$$E = \frac{yx}{n+1}.$$

### 3. La notion de transduction

Considérons un transducteur placé entre deux systèmes mono-énergétiques et transformant l'une dans l'autre les énergies de ces deux systèmes. Soient  $y_1$  et  $x_1$  les variables d'énergie du premier système,  $y_2$  et  $x_2$  celles du second. Les équations des deux systèmes s'écrivent

$$\varphi_1(y_1, x_1) = 0,$$

$$\varphi_2(y_2, x_2) = 0.$$

Ces deux relations sont, comme nous l'avons vu, finies. Il nous manque deux équations pour la détermination des quatre variables  $y_1, x_1, y_2, x_2$ . Ces deux équations seront caractéristiques du transducteur. Nous les écrirons sans préjuger de leur forme

$$f_1(y_1, x_1, y_2, x_2) = 0, \quad (2)$$

$$f_2(y_1, x_1, y_2, x_2) = 0. \quad (3)$$

Le système que nous envisageons n'étant en général pas statique, ces deux équations peuvent être différentielles.

Nous appelons transducteur pur tout appareil dont la seule fonction est la fonction transductrice, à l'exclusion de toute autre fonction, réactive ou dissipative par exemple. Bien entendu dans la pratique, l'énergie est amenée de part et d'autre aux deux paires de bornes d'un transducteur par deux réseaux connexes réactifs et dissipatifs. C'est un des mérites des études récentes sur les transducteurs d'avoir dégagé la fonction transductrice des autres fonctions auxquelles elle est invariablement liée.

Analysons plus en détail cette opération importante qui consiste à isoler un transducteur dans un réseau. Un exemple très simple est celui d'un condensateur dont les deux bornes sont reliées par deux bouts de fil conducteur aux deux bornes d'une bobine toroïdale selfique. Les deux bouts de fil constituent un véritable transducteur entre énergie électrique et énergie magnétique: leur présence permet la transduction, leur absence l'interdit. Les variables d'énergie électrique sont la charge  $Q$  et la différence de potentiel  $V$ . Les variables d'énergie magnétique sont le flux  $\Phi$  et la force magnétomotrice  $\mathfrak{F}$  à un facteur  $4\pi$  près.

Isoler le transducteur est dans ce cas-ci très simple: il suffit de faire abstraction des capacité, self et résistance des bouts de fil, ce qui n'enlève rien à la fonction transductrice. On arrive ainsi très simplement aux équations de transduction:

$$\begin{aligned} V &= -nd\Phi/dt, \\ \mathfrak{F} &= ndQ/dt, \end{aligned} \quad (4)$$

dans lesquelles  $n$  représente le nombre de tours de fil entourant le tore.

Ce cas peut paraître rudimentaire: il est cependant important, car il représente le cas le plus simple de transducteur, tellement simple qu'on aurait tendance à ne même pas le reconnaître comme transducteur. Il nous introduit immédiatement au cas suivant dans l'échelle des difficultés.

Considérons à présent un microphone à quartz piézoélectrique. Une des faces du cristal s'appuie sur une contre-électrode fixe, tandis que sur la face opposée s'applique l'électrode mobile transmettant la pression au cristal. La différence de potentiel entre les deux faces du cristal est reçueillie entre l'électrode et la contre-électrode. Pour isoler la fonction transductrice, nous commençons comme dans le cas précédent, par supposer négligeables des grandeurs non-essentielles comme l'inertie et l'amortissement du cristal et de l'électrode. Remarquons toutefois que nous ne pouvons pas diminuer indéfiniment la surface de l'électrode ou de la contre-électrode sans

diminuer corrélativement la transduction entre énergies électrique et mécanique, à tel point que quand une des électrodes vient à manquer, la transduction n'existe plus. La capacité entre électrode et contre électrode est donc une caractéristique fondamentale de ce transducteur et en est physiquement inséparable. Elle en est toutefois logiquement dissociable, car le système complet du microphone à quartz étant linéaire par rapport à toutes les variables dynamiques qu'il inclut, la capacité pourra être considérée à part comme un élément réactif inclut dans le réseau connexe électrique aboutissant aux deux bornes d'entrée électriques d'un quadripôle purement transducteur dont les équations seront:

$$V = \frac{1}{e} \frac{l}{S} F,$$

$$Q = -e \frac{S}{l} X$$

et dans lesquelles  $e$  est la constante piézoélectrique,  $S$  la surface et  $l$  l'épaisseur du cristal.  $F$  et  $X$  sont respectivement la force et le déplacement mécaniques.

Le cas suivant dans l'échelle des difficultés aura pour exemple type le microphone à condensateur. Après rejet des éléments clairement non-significatifs, il reste pour ce transducteur les équations suivantes:

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon S},$$

$$V = \frac{Q}{\epsilon S} X,$$

où  $\epsilon$  est la constante diélectrique, et  $S$  la surface du condensateur. Ces équations définissent évidemment une transduction d'énergie, mais également une fonction réactive. En effet, envisageons comme un cas particulier de fonctionnement celui où  $X = \text{const.}$  La deuxième équation ci-dessus est alors celle d'un simple condensateur. Comme cette équation n'est pas linéaire par rapport aux variables dynamiques qu'elle inclut, on voit que dans le cas présent, la fonction transductrice est indissociable aussi bien physiquement que logiquement, d'une fonction réactive.

Nous distinguons donc, faute d'une terminologie existante,

- les transducteurs purs,
- les transducteurs mono-déphasateurs, susceptibles d'emmagasiner une seule des énergies en jeu,
- les transducteurs bi-déphasateurs, susceptibles d'emmagasiner les deux énergies en jeu.

Disons tout de suite que, pour retrouver tous les transducteurs usuels, il nous suffira d'envisager les deux premières catégories, et dans la seconde uniquement les transducteurs entre variables d'énergie, si nous décidons d'appeler ainsi ceux dont les équations sont finies par rapport aux variables d'énergie.

#### 4. Mathématiques préalables

Pour épouser tous les cas possibles, nous serons amenés à supposer deux équations finies à quatre variables solubles successivement par rapport à toutes les paires de variables. Dans quatre objets, on peut trouver six paires. Le théorème suivant nous permettra de réduire de moitié le nombre des cas à envisager.

##### Théorème

Soient  $f_1(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$ ,  
 $f_2(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$

deux équations à quatre variables. Si ces deux équations

1. ne sont pas solubles par rapport à une paire  $p_i, p_j$ ,

2. sont solubles par rapport à une paire  $p_i, p_k$ , elles sont également solubles par rapport à la paire  $p_j, p_k$ .

La démonstration s'obtient directement par comparaison des deux relations obtenues en écrivant que le jacobien relatif à la paire  $p_i, p_j$  est nul, et que celui relatif à la paire  $p_j, p_k$  est différent de zéro.

##### Application aux équations d'un transducteur

Nous supposerons les équations (2) et (3) solubles d'abord par rapport à  $y_1$  et  $y_2$ . Le cas suivant sera celui où elles ne seront pas solubles par rapport à  $y_1$  et  $y_2$ , mais bien par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ . Dans ce cas, on aura la condition

$$\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2)}{\partial (y_1, y_2)} = 0. \quad (5)$$

Nous les supposerons enfin non solubles par rapport à  $y_1, y_2$ , non solubles par rapport à  $x_1, x_2$ , mais solubles par rapport à  $y_1, x_1$ . Nous savons alors, d'après le théorème ci-dessus, qu'elles sont solubles par rapport à  $y_1, x_2$  et  $x_1, y_2$ . Le cas de solubilité par rapport à  $y_2, x_2$  est équivalent au cas de solubilité par rapport à  $y_1, x_1$ . Nous avons donc épousé tous les cas intéressants de résolution. Nous pouvons dans cette troisième hypothèse, en tenant compte des relations d'annulation des deux jacobiens, écrire les équations sous la forme:

$$y_1 = \varphi_1(y_2), \quad x_1 = \varphi_2(x_2). \quad (6)$$

Par analogie avec la terminologie en usage dans la théorie des quadripôles linéaires, nous appellerons les équations du transducteur résolues par rapport à  $y_1, y_2$ , équations impédancielles, par rapport à  $x_1, x_2$ , équations admittancielles, par rapport à  $y_1, x_1$ , équations de chaîne.

### 5. Transducteurs linéaires

On remarquera que le théorème ci-dessus est applicable aux équations linéaires, même différentielles; il suffit de se rappeler que ces équations sont ramenées, par les notations complexes, à la forme algébrique.

a) Suivant le schéma de démonstration esquissé ci-dessus, envisageons d'abord le cas des transducteurs d'équations impédancielles, c'est-à-dire de la forme:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \psi & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Nous supposons au départ que les éléments matriciels sont des opérateurs intégro-différentiels quelconques. Le transducteur en question sera passif, non-dissipatif et instantané si pour un choix quelconque de deux des quatre variables  $y_1, y_2, v_1, v_2$ , et moyennant une convention de signes convenable, on a à tout instant

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 = 0 \quad (8)$$

ce qui, compte tenu de (7) s'écrit

$$v_1 \varphi v_1 + v_1 \chi v_2 + v_2 \psi v_1 + v_2 \xi v_2 = 0. \quad (9)$$

Cette condition doit être vérifiée quelles que soient les valeurs de  $v_1$  et  $v_2$ , de leurs dérivées et de leurs intégrales. En particulier pour  $v_1 = 0$ , (9) devient

$$v_2 \xi v_2 = 0$$

et par conséquent  $\xi = 0$ .

Pour une raison analogue  $\varphi = 0$

(9) se réduit donc à:

$$v_1 \chi v_2 + v_2 \psi v_1 = 0. \quad (10)$$

Soit  $v_1, v_2$  une paire de fonctions satisfaisant à (10). Observons ces fonctions à l'instant  $t$ . Supposons que  $\chi$  contienne au moins un opérateur différentiel ou intégral. Choisissons alors une seconde paire de fonctions  $v_1, v_2$ , telle que  $v_1$  soit la même que dans la première paire, et que  $v_2$  ait la même valeur à l'instant  $t$  mais des dérivées et intégrales différentes de ce qu'elles étaient dans la première paire. Nous pourrons toujours choisir ces dérivées et intégrales de telle sorte que (10), dont le second terme ne change pas quand on remplace la première paire par la seconde, ne soit plus vérifiée. Donc  $\chi = \text{const.}$

On démontre de manière symétrique que  $\psi = \text{const.}$  On en déduit

$$\chi + \psi = 0.$$

Finalement l'équation du quadripôle cherché peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

où  $K$  est une constante. Ce quadripôle a été appelé par TELLEGREN gyrateur idéal.

b) Le cas du quadripôle dont les équations sont écrites sous forme admittancielle se traite de façon exactement analogue et conduit de même et uniquement au gyrateur idéal.

c) Il nous reste à considérer des équations du type

$$\mu y_2, \quad v_1 = \nu v_2,$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont encore à priori des opérateurs quelconques. La condition (8) devient maintenant

$$(\mu y_2) (v_2) + y_2 v_2 = 0.$$

Par un raisonnement analogue à celui du cas a), on démontre de même, en choisissant deux paires adéquates de fonctions  $y_2$  et  $v_2$  que  $\mu$  et  $\nu$  sont des constantes, et que par conséquent

$$\mu \nu + 1 = 0.$$

Les équations du quadripôle envisagé peuvent donc s'écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -\frac{1}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Ces équations sont celles du transformateur idéal.

Ayant épousé tous les cas possibles, nous pouvons donc énoncer le théorème:

#### Théorème

Tous les transducteurs linéaires purs sont soit des gyrateurs idéaux, soit des transformateurs idéaux.

### 6. Transducteurs non-linéaires

Comme indiqué ci-dessus, nous nous bornons à envisager les transducteurs mono-déphasateurs entre variables d'énergie. De plus nous nous limiterons aux cas où l'énergie emmagasinée est une fonction rectangle des variables d'énergie. Si nous supposons que c'est l'énergie affectée de l'indice 1 qui est susceptible d'être emmagasinée, nous aurons

$$W_1 = M y_1 x_1,$$

où  $M$  est une constante sans dimensions physiques.

## a) Équations impédancielles

Les équations du transducteur s'écrivent sous la forme

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2). \quad (11)$$

L'équation du bilan énergétique exprime que la somme des quantités élémentaires d'énergie entrant dans l'appareil par les deux borts est égale à l'accroissement élémentaire de l'énergie emmagasinée. Autrement dit, et moyennant une convention de signes convenable, les variables d'énergie doivent satisfaire à la relation

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 = M(y_1 dx_1 + x_1 dy_1). \quad (12)$$

Si on introduit (11) dans (12) et si on tient compte de ce que l'équation résultante doit être satisfaite quels que soient  $dx_1$  et  $dx_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} (1 - M)\varphi_1 - Mx_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} &= 0, \\ \varphi_2 - Mx_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

La première équation a pour solution

$$\varphi_1 = f(x_2) x_1^{\frac{1-M}{M}}$$

où  $f(x_2)$  est une fonction quelconque. Introduisant cette expression dans (13), nous obtenons l'expression de  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = M \frac{df(x_2)}{dx_2} x_1^{\frac{1}{M}}$$

## b) Équations admittancielles

Les équations du transducteur s'écrivent cette fois sous la forme

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \varphi_2(y_1, y_2) \quad (14)$$

et nous savons que sans perte de généralité, nous pouvons supposer vérifiée la condition (5). La substitution de (14) dans (12) fournit comme ci-dessus les deux équations

$$y_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} (1 - M) + y_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} = M\varphi_1, \quad (15)$$

$$y_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} (1 - M) + y_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} = 0. \quad (16)$$

Si dans la relation (5) on substitue à  $\partial \varphi_1 / \partial y_1$  et  $\partial \varphi_2 / \partial y_2$  leurs valeurs tirées de (15) et (16) et si on élimine la solution triviale  $M = 1$ , on obtient

$$M \frac{\varphi_1}{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} = 0.$$

On a donc soit  $\varphi_1 = 0$ , solution sans intérêt, soit  $\partial \varphi_1 / \partial y_2 = 0$ , relation qui exclut toute possibilité de transduction. La catégorie envisagée est donc vide.

## c) Équations de chaîne

Les équations de transduction à envisager sont

$$y_2 = \varphi_1(y_1), \quad x_2 = \varphi_2(x_1).$$

La même substitution dans (12) fournit entre autres

$$Mx_1 = 0$$

qui ne donne qu'une solution triviale. La catégorie envisagée est donc vide. Nous pouvons énoncer:

## Théorème

Les transducteurs mono-déphasateurs entre variables d'énergie ont des équations du type:

$$y_1 = f(x_2) x_1^{\frac{1-M}{M}}, \quad (17)$$

$$y_2 = M \frac{df(x_2)}{dx_2} x_1^{\frac{1}{M}}. \quad (18)$$

## 7. Passage aux transducteurs usuels

Les transducteurs du type du microphone à quartz sont des transformateurs parfaits, tout au moins dans l'analogie force-tension, la seule que nous considérons ici.

Les transducteurs du type du microphone électrodynamique sont des gyrateurs parfaits.

Faisons dans (17) et (18) d'abord  $M = 1/2$ , ce qui assure la linéarité du stockage d'énergie, et ensuite

$$f(x_2) = K x_2$$

avec  $K$  constant. Nous obtenons

$$\begin{aligned} y_1 &= K x_1 x_2, \\ y_2 &= \frac{K}{2} x_1^2 \end{aligned} \quad (19)$$

équations homologues à celles des transducteurs électriques classiques, du type du microphone à condensateur.

Si d'autre part nous choisissons

$$f(x_2) = 1/K x_2$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} x_1 &= K y_1 x_2, \\ y_2 &= -\frac{K}{2} y_1^2 \end{aligned} \quad (20)$$

équations homologues à celles des transducteurs électriques appelés tangentiels par F. A. FISCHER. Le transducteur type de cette catégorie est constitué d'un bloc diélectrique mobile entre les armatures d'un condensateur.

Il nous reste à montrer que les transducteurs du type électromagnétique ont également des équations homologues à (17) ou (18). Ce fait n'est généralement pas reconnu parce qu'on néglige d'analyser ces transducteurs en les deux transducteurs qu'ils contiennent effectivement: le premier entre énergies électrique et magnétique, le second entre énergies magnétique et mécanique.

Soit un microphone électromagnétique schématisé sur la Fig. 1. On le décompose en un gyrateur idéal électromagnétique d'équations (4) suivi d'un transducteur magnétomécanique d'équations

$$F = \frac{\Phi^2}{2 \mu S}, \quad \mathfrak{F} = \frac{\Phi X}{\mu S}$$

dans lesquelles  $S$  est la section des entreferes.

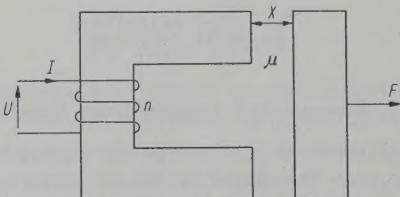


Fig. 1. Transducteur électromagnétique.

La reluctance du circuit magnétique est comptée comme étant uniquement celle des deux entreferes. Ces équations sont homologues à (19).

Une analyse semblable s'applique naturellement aux transducteurs électromagnétiques du type tangentiel dont les équations se dissocient en celles d'un gyrateur idéal et celles d'un transducteur magnétomécanique du type (20).

Nous pouvons donc conclure que tous les transducteurs usuels sont soit des gyrateurs idéaux, soit des transformateurs idéaux, soit des mono-déphasateurs entre variables d'énergie.

#### Remarque

Une recherche, d'intérêt d'ailleurs théorique, montre qu'il existe, en dehors de celles considérées jusqu'à présent, d'autres équations de transduction compatibles avec le premier principe de la thermodynamique. Citons à titre de simple exemple: un transducteur pur entre variables d'énergie:

$$y_1 = K x_1 y_2, \quad x_2 = -\frac{K}{2} x_1^2$$

deux transducteurs purs entre variables de puissance:

1.  $y_1 = K v_1 v_2, \quad y_2 = -K v_1^2;$
2.  $v_1 = K y_1 y_2, \quad v_2 = -K y_1^2.$

Ces derniers possèdent la particularité que, observés autour d'un point de polarisation, ils ne sont ni réciproques, ni antiréciproques, le déterminant de leur matrice de chaîne ne vaut ni 1, ni  $-1$ , il vaut  $-1/2$ .

#### 8. Schémas équivalents

##### a) Microphones à condensateur et électromagnétiques classiques

Ces microphones sont généralement polarisés et les équations de première approximation pour les petites variations autour des valeurs de polarisation, sont linéaires. Pour les équations (19), les relations de première approximation sont les suivantes:

$$y_1 = K X_1 x_2 + K X_2 x_1, \\ y_2 = K X_1 x_1.$$

Les lettres majuscules désignent les valeurs de polarisation, les lettres minuscules les variations autour de ces valeurs. Ces équations permettent la décomposition du transducteur en deux quadripôles connectés en chaîne. Le premier ne contient qu'un élément réactif qui sera, dans le cas du microphone à condensateur, la capacité du système maintenu fixe, et dans le cas du microphone électromagnétique, la reluctance du système maintenu fixe. Le second sera le quadripôle transducteur proprement dit. Dans le cas du micro électromagnétique, il faut encore comme indiqué ci-dessus, ajouter en tête du circuit, un gyrateur idéal. Nous arrivons donc pour le micro à condensateur au schéma équivalent de la Fig. 2.

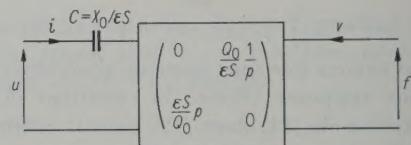


Fig. 2. Schéma équivalent du microphone à condensateur.

Dans ce schéma, l'indice 0 caractérise les valeurs de polarisation. Le quadripôle transducteur est caractérisé par sa matrice de chaîne,  $p$  est l'opérateur différentiel.

Pour le micro électromagnétique, le schéma est représenté sur la Fig. 3.

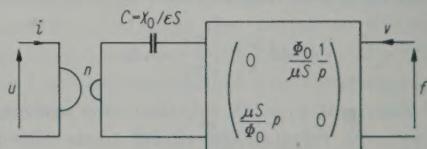


Fig. 3. Schéma équivalent du microphone électromagnétique.

Pour le gyrateur nous utilisons le symbole graphique proposé par TELLEGREN [10]. Le rapport de transformation de ce gyrateur est  $n$ . On remarquera que la reluctance du circuit magnétique joue le rôle d'une véritable capacité.

Les schémas équivalents que nous venons de déduire ont l'avantage de mettre en évidence le fait que les transducteurs à condensateur et électromagnétiques sont formellement identiques à un gyrateur idéal près. R. FELDTKELLER et W. NONNENMACHER ont proposé un autre schéma équivalent pour le transducteur électromagnétique. Dans ce schéma, le gyrateur a été déplacé à l'extrême droite de la chaîne, ce qui a obligé à le retourner et à remplacer le quadripôle de transduction magnétomécanique par un quadripôle dont la matrice est du type:

$$\begin{pmatrix} 0 & Kp \\ \frac{1}{Kp} & 0 \end{pmatrix}$$

où  $K$  est une constante, et dont on distingue mal la signification physique. Il nous paraît plus normal de commencer, selon la logique des choses, par le gyrateur de transduction électromagnétique, de le faire suivre de l'élément réactif du transducteur magnétomécanique, et de terminer par le quadripôle de transduction magnétomécanique.

b) *Microphones électrique et magnétique tangentiels*

On dérive de la même façon, à partir des équations (20), les schémas équivalents relatifs à ces transducteurs. Ces schémas sont de la forme représentée sur la Fig. 4, avec ou sans le gyrateur idéal, selon qu'on considère un transducteur électrique ou magnétique.

Pour ce qui concerne la représentation du quadripôle de la Fig. 2 par différentes méthodes,

et en recourant à l'usage d'éléments électriques réels ou fictifs (capacités positives et négatives, seuls dépendant de la fréquence, etc.) nous renvoyons le lecteur à l'article déjà cité de R. FELDTKELLER et W. NONNENMACHER, de même qu'à W. REICHARDT et A. LENK.

### 9. Résumé

Après avoir analysé l'opération qui consiste à isoler un transducteur dans un réseau, on démontre que tous les transducteurs linéaires sont soit des transformateurs idéaux, soit des gyroscopes idéaux. On démontre ensuite que les équations des transducteurs électrostatiques et électromagnétiques, normaux ou tangentiels, sont toutes des cas particuliers d'un système d'équations général, représentant tous les transducteurs comportant un stockage d'une des énergies en jeu. On termine en proposant, pour les transducteurs usuels, des schémas équivalents traduisant cette parenté de structure.

(Reçu le 30 Décembre 1955.)

### Références

- [1] FISCHER, F. A., Der piezoelektrische Wandler als widerstandsreziproker Gebilde zum elektrodynamischen. Arch. elektr. Übertragung **4** [1950], 321–324.
- [2] FISCHER, F. A., Grundzüge der Elektroakustik. Fachverlag Schiele und Schön, Berlin 1950.
- [3] FISCHER, F. A., Über die verschiedenen Darstellungen der elektroakustischen Wandler. Arch. elektr. Übertragung **7** [1953], 569–574.
- [4] FISCHER, F. A., Herleitung der Kraftgesetze für sämtliche magnetischen und sämtliche elektrischen Schallwandler aus je einem allgemeinen Gesetz. Acustica **3** [1953], 441–448.
- [5] HECHT, H. et FISCHER, F. A., Eine analytische Theorie der elektroakustischen Wandler; in WIEN-HARMS, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 17, 2. Teil., Akad. Verlagsges., Leipzig 1934.
- [6] HECHT, H., Elektroakustische Wandler, Verlag J. A. Barth, Leipzig 1951.
- [7] FELDTKELLER, R. et NONNENMACHER, W., Einheitliche Ersatzschaltbilder für elektromechanische Wandler. Arch. elektr. Übertragung **8** [1954], 191–196.
- [8] REICHARDT, W. et LENK, A., Die Vierpolersatzschaltbilder der elektromechanischen Wandler, Teil I. Acustica **5** [1955], 1–6.
- [9] PRACHE, P. M., Les réseaux électromécaniques linéaires. Bull. Soc. Franç. Électr. **2** [1952], 20.
- [10] TELLEGREN, B. D. H., The gyrorator; A new electric network element. Philips Res. Rep. **3** [1948], 81–101.

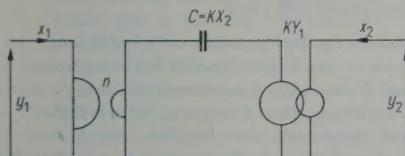


Fig. 4. Schéma équivalent des transducteurs tangentiels.

## Buchbesprechungen

**Impulstechnik**, Vortragsreihe des Außeninstituts der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg in Verbindung mit dem Elektrotechnischen Verein Berlin e.V., zusammengestellt und bearbeitet von Priv. Doz. Dr.-Ing. F. WINCKEL, Berlin. Springer-Verlag, Berlin 1956, VIII, 346 Seiten, 242 Bilder, 16 cm  $\times$  23,5 cm, Ganzleinen DM 37,50.

Das vorliegende Buch ist der Niederschlag einer Vortragsreihe, welche den Zweck hatte, die Methoden der Impulstechnik, die sich in ihren verschiedenen Anwendungsgebieten zum Teil sehr verschiedenartig entwickelten, gegenüberzustellen. Die Vorträge sollten die gemeinsamen Züge dieser neuen Disziplin hervorheben, die auf bestimmten Gebieten der Physik und der Technik die jüngste stürmische Entwicklung erst ermöglichte. Es ist den Veranstaltern und dem Bearbeiter in Zusammenarbeit mit den Vortragenden gelungen, über eine Auswahl hinaus eine fast geschlossene Behandlung des Gesamtgebietes zu geben, wie die folgende Inhaltsangabe der Einzelbeiträge zeigt. Das Buch ist daher nicht nur geeignet, dem Fachmann eines Teilgebietes einen Überblick über das Gesamtgebiet zu geben, sondern auch als Einführung für den Studierenden zu dienen.

F. A. FISCHER: **Impulsanalyse**. Die an sich bekannten mathematischen und physikalischen Grundbegriffe und die Gesetzmäßigkeiten der Impulsanalyse werden unter Verzicht auf äußerste Strenge anschaulich dargestellt.

W. MEYER-EPPLER: **Anwendungen der Informationstheorie auf Impulsprobleme**. Bei Verwendung von Impulsen zum Informationstransport entsteht das technische Problem, diese Information von den unvermeidlichen Störungen zu trennen. Die theoretischen Grundlagen und die geeigneten Mittel (Optimalfilter, Selektoren, Exhaustion, Periodographen) werden behandelt.

W. KROEBEL: **Die Impulstechnik als Meßverfahren in der Physik**. Der Beitrag behandelt die für die Impulstechnik zur Messung schnell verlaufender Vorgänge wesentlichen Funktionseinheiten zur Impuls-Erzeugung, -Verzögerung, -Verstärkung, -Umformung, -Frequenzvervielfachung und -Zählung. Die Methoden der Messung mit Impulsen werden an Beispielen der Kernphysik erläutert.

H. HOLZWARTH: **Probleme der Mehrfachausnutzung von Nachrichtenwegen mit Pulsmodulation**. Die bei gleichzeitiger Übertragung vieler Gespräche auftretenden Zusammenhänge zwischen Frequenzbandbedarf, Nebensprechen, Geräuschreduktion und Impulsform werden behandelt und die Vorteile der Impulsmodulationsysteme bezüglich der Anforderungen an Genauigkeit der Dämpfungskurve und an Linearität des Phasenganges aufgezeigt.

W. BRUCH: **Die Impulstechnik des Fernsehens**. Aufbauend auf einigen besonders charakteristischen Einzelseitigkeiten wird ein Bild der Fernsehimpulstechnik gegeben, die durch die Vielfalt der auftretenden Probleme besondere Aufmerksamkeit verdient.

E. KRAMAR: **Die Anwendung der Impulstechnik in der Funknavigation**. Die lange bekannten Peilverfahren zur Navigation lassen sich durch Entfernungsmessungen, die mit Hilfe von Impulsen durchgeführt werden.

den können, ergänzen bzw. ersetzen. Die Grundlagen von DME (Distance Measurement Equipment) zur Nahnavigation und Loran (Long Range Navigation) zur Fernnavigation werden erläutert.

W. DIEMINGER: **Impulsverfahren in der Ionosphärenforschung**. Nach einer Einführung über Impulserzeugung, -empfang und -registrierung werden die speziellen Probleme der Ionosphärenforschung mittels Impulstechnik (Lotung mit veränderlicher Frequenz, schräger Einfall, Amplitudenbeobachtung, Rückstrebereobachtungen) beschrieben.

A. P. SPEISER: **Impulsprobleme der elektronischen Rechenmaschinen**. Die Anwendung in Rechenmaschinen stellt besondere Anforderungen an die Impulstechnik (Speicherung, Platzbeschränkung, Betriebssicherheit, Verwendung von Transistoren), die einzeln behandelt werden.

P. K. HERMANN: **Optische Impulstechnik**. Die Anforderungen der optischen Nachrichtenübermittlung an die Impulstechnik werden denen der Funktechnik gegenübergestellt. Sie unterscheiden sich von den letzten durch die größere Bündelbarkeit, die Abbildungsmöglichkeit, die größeren Energiequanten, die Begrenzung der Strahlungsleistung, die Eigenart der Empfänger (Auge, Photozellen) und die Beschränkung der Impulsdauer (elektrische Verschlüsse).

H. FACK: **Impulsübertragung im Nervensystem**. Der Beitrag gibt eine theoretische Deutung des Verhaltens der Nerven durch Zerlegung in einen passiven, die Ausbreitung beherrschenden Anteil und einen lokal wirksamen, aktiven Anteil. Er gipfelt in der Angabe eines Modells, das die Funktionen des Nervs in bezug auf Spannungssprünge und -impulse sowie Restitutionsvorgänge wiedergibt.

H. FACK: **Informationstheoretische Behandlung des Gehörs**. Aus Messungen der Lautstärkeunterschiedsschwellen und des Tonhöhenunterscheidungsvermögens und der Analysezeit des Gehörs läßt sich seine Informationskapazität berechnen. Es werden Vergleiche zu den bekannten Vorgängen beim Hörvorgang und seiner Umsetzung gezogen.

K. TAMM

W. MEYER-EPPLER, **Experimentelle Untersuchungen zum Mechanismus von Stimme und Gehör in der lautsprachlichen Kommunikation**, Forschungsbericht Nr. 221 des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen. Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1956, 41 Seiten, 24 Bilder, DIN A4, broschiert DM 13,45.

Der Inhalt des Heftes befaßt sich kritisch mit der Interpretierbarkeit der Visible-Speech-Spektrogramme. Grundlagen und Technik der „anamorphotischen Verzerrungen“ (durch Änderung der Analysiergeschwindigkeit) werden eingehend dargestellt. Am Problem der Abtrennung der semantischen Sphäre wird gezeigt, wie man mit Hilfe des Visible-Speech-Verfahrens Eigenschaften der bei lautsprachlicher Kommunikation verwendeten Signale auffinden kann. Den Schluß bildet eine Darstellung der Störung des Phonations- und Artikulationsvorganges durch den „Lee-Effekt“.

G. R. SCHODDER

## Berichtigung

G. VENZKE, **Zur Formgebung von Hallräumen für Meßzwecke** (Acustica 6 (1956), Nr. 1, Seite 4). Die Gleichung (3) in der linken Spalte von Seite 4 muß richtig lauten:

$$k_{x,0} = k_n - (1 - \mu_x) \frac{\alpha'_0}{l_x} \frac{c}{2}.$$